

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO



CARLO FELICE MANARA

COMPUTER ED INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

QUADERNO 16 / 1986

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

Via C. Saldini, 50 - 20133 MILANO

Abstract.

*Si avanzano alcune proposte e si presenta qualche spunto per l'impiego dei piccoli calcolatori tascabili e dei computer di piccola potenza nell'insegnamento della Matematica a livello di scuola secondaria.*

*1980 Mathematics Subject Classification. Primary 00A25 ; Secondary 68-00.*

*Key words and phrases.*

*Insegnamento della Matematica; calcolatori tascabili; computer di piccola potenza.*

**Publicazione realizzata con un contributo dei fondi 40% M.P.I. per il progetto "Insegnamento - apprendimento della Matematica".**

C.F. Manara

COMPUTER ED INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA.

Appunti sulla utilizzazione intelligente delle macchine elettroniche nella didattica della Matematica.

PARTE I - La Matematica nella formazione dei giovani

I - Perché insegnare la Matematica?

"Scire debet quid petat ille qui sagittam  
vult mittere"

(Lucio Anneo Seneca - Lettere a Lucilio)

1. - Le discussioni numerosissime sulla didattica della Matematica danno spesso per scontato il fatto che questa dottrina debba essere insegnata; forse, se si ponesse qualche domanda che riguarda più da vicino le ragioni di questa necessità, le risposte non sarebbero sempre semplici e chiare. Sostanzialmente le risposte che si ottengono di solito potrebbero essere riassunte nella frase che "... della Matematica non si può fare a meno".

Siamo d'accordo sulla verità dell'enunciato, ma proprio per questa ragione pensiamo che i motivi dell'insegnamento della Matematica debbano essere analizzati più a fondo di quanto non mostri la frase citata. In altre parole noi crediamo che, prima di porsi la domanda di come insegnare la Matematica, sia bene domandarsi perché si insegna questa scienza. Questa domanda si presenta, presto o tardi, alla coscienza di ogni insegnante, nel corso della sua fatica; forse la domanda non viene enunciata in modo cosciente ed esplicito da parte degli insegnanti. Ma pensiamo che essa venga presentata in forma più esplicita e polemica da parte dei discendenti, che spesso e volentieri domandano perché si insegnano loro tante cose, che spesso ad essi risultano difficili e sgradevoli; e spesso pure pongono l'altra domanda: "a che serve?".

Pare a noi che non si possa fare a meno di cercare di rispondere a domande come queste, non soltanto perché esse sono sostanzialmente giustificate e ragionevoli, ma anche - e soprattutto - perché la risposta che daremo potrà anche servire alla ricerca delle strategie didattiche più ap



to riguardino i contenuti elementari della Matematica; per intenderci, quelli che venivano indicati quando, in passato, si presentavano come scopi della scuola quelli di insegnare a "leggere, scrivere e far di conto". Quel "far di conto" comprende verosimilmente le nozioni di aritmetica elementare che ancora oggi vengono impartite nella scuola dell'ordine elementare, almeno fino a che i nuovi programmi non introdurranno delle nozioni (come quelle di probabilità e di logica) che - a nostro parere - sono destinate a confondere le idee dei discenti, dopo quelle dei docenti, che non hanno la preparazione adeguata, tanto a livello teorico che a livello didattico.

Sulla stessa linea stanno anche le nozioni più avanzate di Matematica che formano il patrimonio di conoscenze tecniche necessarie per una certa professione; alludiamo per esempio alle nozioni di matematica finanziaria, che dovrebbero formare il bagaglio professionale dei ragionieri, oppure alle nozioni di trigonometria, che dovrebbero essere possedute dai tecnici degli istituti per Geometri, oppure infine a quelle nozioni di Matematica superiore (Calcolo differenziale ed integrale, Geometria analitica, Geometria differenziale e così via) che dovrebbero entrare nel patrimonio intellettuale dell'ingegnere.

Ci pare abbastanza chiaro che se lo scopo dell'insegnamento della Matematica, ad ogni livello di scuola, si limitasse al conferimento di questi contenuti, sarebbero più che giustificate le domande che si sintetizzano nella richiesta "A che serve?". Infatti, in questo ordine di idee, potrebbe essere giustificato l'atteggiamento del discente il quale affermasse la propria intenzione di esercitare la professione per esempio di avvocato, e quindi rifiutasse l'apprendimento di molti di questi contenuti, perchè non fanno parte del bagaglio professionale specialistico della professione che egli intende abbracciare.

Si apre così la discussione sullo scopo dell'insegnamento, sui rapporti tra contenuti dell'insegnamento e strutture, sul significato della azione educativa e sul valore della formazione che la scuola deve conferire.

2. - L'analisi e la discussione a proposito dei fini che si possono porre all'insegnamento della Matematica, e quindi la risposta alle obiezioni che si avanzano a proposito del significato e della utilità del suo insegnamento, non possono prescindere - a nostro parere - dalla analisi degli

altri livelli a cui abbiamo accennato nel paragrafo precedente. A nostro parere infatti, lo scopo dell'insegnamento della Matematica non dovrebbe limitarsi a quello di conferire delle nozioni tecniche utili alla vita comune associata nei paesi civilizzati, o alla esplicazione di determinate professioni. In una prospettiva molto più allargata, tale insegnamento dovrebbe mirare a sviluppare nei discenti la conoscenza e la consuetudine ai procedimenti di schematizzazione della realtà, della rappresentazione di questa mediante simboli, della deduzione rigorosa, fondata sulla utilizzazione delle regole sintattiche formali dei simboli adottati. Si ripresenta pertanto a questo punto l'insieme di considerazioni che abbiamo proposto nel paragrafo precedente a riguardo del secondo livello di formazione che può essere consentito dall'insegnamento della Matematica; precisamente quel livello in cui si cerca di far acquisire ai discenti una certa capacità di descrivere, di conoscere e di interpretare la realtà con opportuni simboli convenzionali, insieme con una certa abilità di manipolazione della realtà stessa. A queste acquisizioni si dovrebbe accompagnare la costruzione di certe strutture mentali e il progresso della capacità deduttiva logica generale.

Occorre tuttavia osservare che il valore formativo dell'insegnamento della Matematica non dovrebbe limitarsi a questi obiettivi: uno scopo ulteriore potrebbe essere quello di raggiungere il terzo livello che abbiamo nominato, cioè la comprensione del principio e del significato della matematizzazione della realtà, e quindi anche della importanza della Matematica nella nostra cultura e nella nostra civilizzazione.

Se si accettano queste idee, e soprattutto se si accettano questi scopi dell'insegnamento della Matematica nelle nostre scuole, ovviamente si deve anche accettare che l'aspetto del conferimento di conoscenze tecniche, immediatamente utilizzabili nella vita comune associata, o nelle particolari professioni abbracciate dai singoli discenti diventa un po' meno importante di fronte al valore formativo che la Matematica può avere, se insegnata in un determinato modo. Valore formativo che apre sostanzialmente la porta alla comprensione dello spirito della scienza moderna, la quale è dominata dalla mentalità della Matematica molto più profondamente di quanto non si creda comunemente e di quanto i cultori stessi delle scienze particolari siano disposti ad ammettere.

In questo ordine di idee, appare chiaro che l'insegnamento delle procedure per risolvere i problemi matematici oggi codificati e conosciuti, e - al limite - l'insegnare ad applicare le formule, passa in seconda

linea di fronte alla formazione alla analisi logica ed all'allenamento ad escogitare strategie risolutive dei problemi.

Si apre quindi in modo naturale la discussione sulla utilizzazione delle macchine calcolatrici nella soluzione dei problemi matematici, e di conseguenza sulla opportunità o sulla necessità di insegnare la loro utilizzazione nella scuola, magari facendo oggetto questa utilizzazione di appositi insegnamenti (di una particolare materia da chiamarsi "informatica" come è oggi di moda, o da chiamarsi con altri nomi).

"O maledetto, o abominoso ordigno  
Che fabbricato nel tartareo fondo  
Fosti per man di Belzebù maligno  
Che ruinar per te disegnò il mondo  
All'inferno, onde uscisti, ti rassigno."

(Ludovico Ariosto-Orlando Furioso. Canto IX-91)

1. - Sui rapporti tra l'uomo e le macchine che egli inventa e costruisce sono state scritte intere biblioteche, e non presumiamo di dire qui alcuna novità; solo vorremmo avanzare alcune osservazioni, che potrebbero essere considerate del tutto banali (e che molto probabilmente lo sono) ma che sono forse utili per precisare la nostra posizione nei riguardi dei problemi che ci interessano.

Questi infatti riguardano l'insegnamento, cioè la trasmissione di un insieme di conoscenze fondate e motivate e di regole di comportamento nei riguardi della realtà esistente, e quindi anche delle macchine, che fanno parte di questa realtà, e che possono servire ad agire su di essa, a manipolarla e modificarla.

A titolo di esempio, vorremmo prendere in considerazione il rapporto che si può instaurare con una macchina molto comune e di uso diffuso: l'automobile. E' facile osservare che il comportamento di un soggetto una no nei riguardi di questa macchina può prendere posto in una gamma molto vasta: si può avere il comportamento del soggetto che ha dimenticato il funzionamento e le nozioni sulla costituzione della macchina che usa: egli si limita a fare certe azioni per ottenere certi risultati; potremmo dire che questo è l'atteggiamento dell'utilizzatore, cioè della maggioranza de gli utenti della macchina. Ad un secondo livello si potrebbe porre l'atteggiamento di chi conosce la disposizione delle parti ed il loro funzionamento.

Si potrebbe dire che, nell'utente medio, questo atteggiamento è già molto raro; comunque pensiamo che esso sia necessario per il meccanico ri paratore, che deve conoscere la macchina in tutte le sue parti e nei loro rapporti reciproci.

Ad un terzo livello potremmo porre l'atteggiamento dell'ingegnere che ha progettato la macchina; questi non solo conosce le parti ed il loro funzionamento, ma conosce anche il perchè una certa parte della macchi

na ha una certa posizione, una certa dimensione, una certa costituzione. Ad un livello ancora superiore potremmo porre lo scienziato, che conosce e spiega i fenomeni di trasformazione della energia, fenomeni che portano dalla energia chimica delle molecole del carburante e dell'aria, alla ossidazione (combustione) che produce energia termica, e da questa alla energia meccanica che provoca il movimento della macchina, e la produzione di calore non utilizzato o dannoso (a causa degli attriti).

Vorremmo osservare, prima di ogni altra considerazione, che ognuno di questi atteggiamenti ha una sua razionalità; infatti anche il guidatore del camion sa che questo volta a destra perchè egli ha girato il volante verso destra; tuttavia pensiamo che non vi sia dubbio sul giudizio a proposito del significato e della profondità delle spiegazioni che vengono date con gli altri atteggiamenti. Ciò non significa che non si debba più insegnare a guidare i camion: almeno fino a che le nostre abitudini sui trasporti e sui consumi rimarranno quelle che sono ora, ci sarà sempre bisogno di guidatori. Ma vorremmo che si distinguesse tra l'addestramento del guidatore di camion e l'insegnamento della meccanica e della fisica. Vorremmo anche osservare esplicitamente che più i soggetti sono giovani e più facilmente assimilano l'addestramento a collegare determinati comportamenti con determinati effetti, e quindi con il raggiungimento di determinati fini; quindi è più facile addestrare il giovane che l'anziano a guidare bene un camion. Ma il discorso cambia un poco se si tratta invece di insegnare la fisica al giovanissimo, che forse ha meno abitudine al l'analisi profonda ed alla ricerca delle cause che non siano immediate.

Vorremmo aggiungere ancora che lo stadio di apprendimento, che porta alla conoscenza puramente operativa del meccanico riparatore, diventa sempre più inutile con il progredire della tecnica. Si pensi per esempio a quelle macchinette di cui ci serviamo moltissime volte ogni giorno e delle quali ignoriamo quasi tutto: gli orologi.

Ognuno di noi sa leggere l'indicazione dell'orologio, ma la conoscenza della struttura interna di questa macchina, almeno fino a qualche tempo fa, era riservata a pochi specialisti artigiani, che sapevano smontarle e ripararle; oggi, con gli orologi al quarzo e - peggio - con quelli a cristalli liquidi, la categoria degli orologiai è destinata alla sparizione. Sarebbe infatti impossibile riparare in un piccolo laboratorio artigiano i circuiti stampati di un orologio a cristalli liquidi: è quindi più conveniente gettarlo quando si guasta, e comperarne uno nuovo.

Pertanto il rapporto tra l'uomo e questa macchinetta si riduce a

quello dell'utilizzatore che non capisce nulla della struttura interna e del fisico che lo progetta.

E' facile osservare che si sta creando una situazione psicologica nei riguardi della macchina che va dall'entusiasmo più ingenuo, e spesso ingiustificato, al timore, più o meno oscuro, di essere sempre più schiavi di queste cose che l'uomo ha costruito ed inventato e delle quali, con il passare del tempo, non può più fare a meno. Questo timore non è nuovo, perchè già Ludovico Ariosto poneva in bocca ad Orlando una maledizione contro le armi da fuoco, che erano destinate (secondo lui) a distruggere ogni valore personale ed ogni onore di cavalleria; la maledizione viene pronunciata da Orlando mentre getta in mare lo schioppo, descritto come invenzione di Belzebù; ma ognuno vede quale sia stata la efficacia di questa distruzione tentata e del giudizio negativo che l'accompagnava.

E' abbastanza facile presumere che sentimenti analoghi vengano originati dal comparire delle nuove macchine per l'elaborazione della informazione: si va dagli entusiasmi più smaccati ai timori, spesso non completamente giustificati. Pensiamo quindi che sia giustificata una riflessione matura e serena sulla posizione che la scuola deve prendere di fronte a queste invenzioni, che stanno invadendo il mondo e cambiando radicalmente il nostro modo di vivere.

Pensiamo inoltre che una posizione equilibrata nei riguardi di questi problemi richieda una certa riflessione sul fenomeno di apprendimento, considerato in generale, e sul significato della risoluzione di un problema matematico.

2. - Ci siamo soffermati sull'atteggiamento nostro nei riguardi delle macchine perchè ci pare di poter intravedere qualche analogia di questo atteggiamento con quello che spesso viene assunto nei riguardi della Matematica; ovviamente esponiamo queste idee con la coscienza della grande differenza tra le due posizioni, ma non vogliamo rinunciare ad esporle per certi aspetti paradossalmente analoghi che pare di poter percepire.

Invero si direbbe che spesso, nei riguardi della Matematica, gli utenti si comportino come si comporta l'uomo comune nei riguardi di una macchina che egli stima troppo complicata per cercare di capire come funzioni. In questo atteggiamento l'utente si accontenta di memorizzare certi comportamenti, di adottare certe procedure di condotta, con la fiducia che la struttura interna della macchina produrrà senza dubbio i risultati

desiderati; ma si rifiuta di cercare di capire quali siano le ragioni per cui ciò avviene.

Invero, come abbiamo detto, spesso anche gli utenti della Matematica superiore si comportano un poco in questo modo, senza cercar di capire le connessioni logiche che fondano il "comportamento" delle formule matematiche, e considerando queste alla stregua di una macchina che fornisce certe risposte a certe domande, senza che sia necessario capire il perchè.

Chi scrive ricorda di aver lungamente discusso con un giovane ed entusiasta ingegnere (o futuro tale) il quale pretendeva di dover insegnare le funzioni esponenziali nel campo complesso in una scuola professionale, asserendo che questi strumenti concettuali sono necessari per il trattamento delle correnti elettriche alternate; il sottoscritto si è sforzato lungamente di fargli capire che, nei riguardi dei pochi e ristretti problemi che interessavano i discenti, era sufficiente la trigonometria elementare. Ovviamente ogni argomentazione è stata inutile, e la discussione ha condotto il sottoscritto a convincersi che il giovane ed entusiasta insegnante non avesse capito molto della teoria delle funzioni di variabile complessa; e che in particolare utilizzasse le proprietà formali della funzione esponenziale nel campo complesso come delle regole magiche, delle quali ignorava evidentemente i fondamenti. E - ciò che è peggio - si accingeva ad insegnarle come regole magiche ai propri allievi.

Pensiamo che il lettore abbia già capito che atteggiamenti consimili sono da noi considerati come deleteri, per varie ragioni. Anzitutto perchè vanno esattamente nella direzione opposta a quella della formazione alla analisi logica ed al procedimento razionale che dovrebbe essere lo scopo principale dell'insegnamento della Matematica. In secondo luogo perchè le formule, quando sono memorizzate e non comprese nei loro fondamenti, possono essere facilmente dimenticate, lasciando il soggetto che dovrebbe utilizzarle completamente sprovvisto di fronte ai problemi da risolvere.

Purtroppo siamo convinti del grave pericolo che l'impiego delle macchine elettroniche nell'insegnamento conduca a radicare nella mente degli utenti la convinzione che la cosa più necessaria sia l'addestramento all'impiego delle macchine, alle quali sarebbe delegata la responsabilità della risposta, ritenuta valida in ogni caso senza che se ne sappia il perchè.

Sarebbe questo un atteggiamento analogo a quello di coloro che volessero insegnare la Matematica, e la manovra delle macchine elettroniche,

come si addestra un guidatore di camion, abituandolo a collegare le cause prossime ai risultati immediati delle proprie azioni. Come abbiamo già detto, non escludiamo che sia necessario addestrare anche i guidatori di camion; ma crediamo che l'insegnamento della Meccanica razionale e della Fisica sia cosa ben diversa dall'addestramento alla guida o anche della formazione di un meccanico riparatore.

### III - I momenti fondamentali dell'apprendimento

"Jam vero unum et unum duo, duo et duo  
quatuor odiosa cantio mihi erat"

(S. Agostino-Confessiones-Lib. I Cap. XIII)

1. - Per far comprendere appieno la nostra posizione nei riguardi dei problemi che ci interessano pensiamo che sia utile esporre qualche breve considerazione sul fatto dell'apprendimento. Le considerazioni che faremo non andranno al di là di un ovvio buon senso, perchè noi non siamo psicologi o pedagogisti; ma pensiamo di far cosa utile esponendole, perchè crediamo che anche il buon senso abbia diritto di parola, accanto alle parole togate degli specialisti e degli scienziati.

A nostro parere l'apprendimento umano passa attraverso vari stadi, che vorremmo presentare brevemente; in linea preliminare osserviamo tutta via che la enumerazione che faremo non rispecchia la scansione cronologica delle fasi attraversate dalla nostra mente; anzi tali fasi sono spesso commiste e contemporanee.

In questo ordine di idee, noi pensiamo che il primo momento dell'apprendimento consista nella memorizzazione delle nozioni; è questa una osservazione del tutto banale, che era nota anche all'antichità. Ricordiamo infatti che per i Greci le Muse erano considerate figlie di Mnemosine, cioè della Memoria. La lotta contro il nozionismo e contro l'apprendimento a memoria, che è stata uno dei cavalli di battaglia della contestazione studentesca di vari anni fa, da questo punto di vista non è che un cumulo di scempiaggini.

Un secondo momento del processo di apprendimento è quello dell'esercizio. Sarà inutile ribadire l'importanza di questo momento, che ha sempre fatto parte della pratica di insegnamento di ogni tempo. Sappiamo bene che i giovani allievi non sempre hanno simpatia per l'esercizio; e neppure questa è cosa nuova, se si ricordano le parole che S. Agostino, nelle sue "Confessioni" dedica alla "odiosa canzone" che serviva di mezzo per memorizzare le operazioni aritmetiche elementari. Ma è facile osserva re che la mente giovane trova una certa facilità nel memorizzare nozioni e regole, anche se spesso tale memorizzazione è puramente superficiale; ma rifiuta spesso di affrontare la fatica dell'esercizio. Tuttavia questo è assolutamente necessario, perchè ognuno capisce che se anche si memorizzassero tutte le regole della grammatica e della sintassi di una lingua,

non si può dire di conoscerla fino a che non si affronta la fatica della applicazione di tali regole ai casi pratici. Analogamente, la conoscenza delle regole formali dell'Algebra costituisce solo il primo passo per poter asserire di conoscere questo ramo della Matematica.

Tuttavia occorre ribadire che l'insegnamento di una materia formativa come la Matematica non può e non deve esaurirsi nella memorizzazione e nell'addestramento alla applicazione, ma deve giungere anche alla rimediatazione dei significati e dei fondamenti delle procedure teoriche.

Ricordiamo a questo proposito che già Proclo, il filosofo e storico della Matematica del secolo IV, polemizzava con gli epicurei, i quali irridevano i geometri, dicendo che essi insegnavano delle cose inutili: infatti anche il somaro, se deve andare ad un mucchio di fieno, non percorrere due lati di un triangolo, perchè sa che il terzo è minore della somma degli altri due.

Ribatteva Proclo che proprio in questo consiste la differenza tra la conoscenza del somaro e quello dell'uomo: nel fatto che l'uomo non si limita a sapere i fatti, ma ne conosce il perchè, sa dimostrare che le cose stanno in un certo modo perchè esistono delle ragioni che spiegano gli stati di fatto, e lo convincono che le cose non potrebbero essere altrimenti.

Noi pensiamo che queste argomentazioni abbiano portata generale, e che la Matematica non debba essere considerata ed insegnata semplicemente come una scienza che fornisce delle risposte; ma che essa debba essere considerata ed insegnata soprattutto come una scienza che forma alla ricerca del perchè, delle motivazioni, delle risposte.

Ciò che diciamo ci sembra vero soprattutto oggi, quando la necessità e la urgenza di utilizzare le nuove macchine per la elaborazione della informazione minacciano di fare dell'insegnamento della Matematica un addestramento alla utilizzazione di certe procedure non capite, per avere risposte nel minor tempo possibile, senza curarsi delle motivazioni delle risposte stesse.

2. - Da ciò che abbiamo detto finora pensiamo si possa trarre un primo insieme di valutazioni dei programmi di utilizzazione delle nuove macchine; tale valutazione sarà fatta qui seguendo la classificazione dei vari livelli di apprendimento che abbiamo dato poco fa.

Anzitutto, per quanto riguarda la memorizzazione delle nozioni, pa-

re abbastanza pacifico che le nuove macchine possano essere utilizzate in modo intelligente per sollevare la memoria da tante nozioni ingombranti che forse impedivano la memorizzazione di informazioni più importanti.

Tuttavia da varie parti vengono segnalati i pericoli che l'impiego abituale delle macchine da calcolo sia un incitamento alla pigrizia. Gli scolari più svogliati possono trovare giustificazione nel rifiuto a memorizzare le "tabelline", oppure ad imparare le procedure più elementari del calcolo aritmetico, con la scusa che ormai le macchine ci sollevano da questa fatica.

Questo pericolo esiste, ma pensiamo che non sia tanto grave come gli altri, che nascono dalla confusione sul significato e sullo scopo dell'insegnamento della Matematica. E del resto l'insegnante accorto può porre facilmente rimedio a queste tentazioni di pigrizia, insistendo opportunamente su esercizi che possono mettere in crisi l'impiego eccessivo delle macchine.

3. - Abbiamo detto poco fa che al momento della memorizzazione fa seguito, dal punto di vista logico, quello dell'esercizio e dell'addestramento. In questo campo l'impiego intelligente delle macchine elettroniche potrebbe essere di grande aiuto nell'insegnamento, purché tali macchine siano impiegate in modo intelligente.

Un primo punto che vorremmo mettere in chiaro è che non si deve mai pensare che tali macchine possano sostituire il lavoro dell'insegnante in ciò che questo lavoro ha di proprio e specifico; cioè nell'opera di avviamento alla analisi logica ed alla formazione della mentalità razionale del discente. Esiste tuttavia tutta una massa di lavoro che può essere svolto con molta efficacia e con sollievo dell'insegnante mediante l'ausilio delle macchine, che sono tuttavia da guardarsi - ribadiamo - come sussidi didattici.

Esistono in commercio moltissimi programmi (\*) molto pubblicizzati dalle case costruttrici di macchine. Con tali programmi si possono svolgere lavori di addestramento e di esercizio in molte materie: dalle lingue

---

(\*) Non intendiamo usare il termine "software", perché riteniamo che il suo impiego sia un sintomo di sudditanza linguistica ed intellettuale, propria dei provinciali colonizzati e ritardati.

alla geografia, dalla Fisica alla Matematica. Esistono anche dei linguaggi opportuni, con i quali l'insegnante può preparare il proprio corso di esercizi, ed anche stabilire opportunamente certe procedure di verifica dell'apprendimento che egli ritiene valide.

La macchina non si stanca, e quindi è più paziente dell'uomo; la macchina può essere adattata ai ritmi di apprendimento dei vari soggetti, può accettare programmi ramificati ed essere utilizzata nel modo e nel tempo che si ritiene più opportuno (anche fuori dagli orari scolastici e dagli edifici).

Occorre dire che non tutti i programmi sono di buon livello, ed alcuni rivelano la scarsa cultura e la fretta di chi li ha stesi: ci è capitato per esempio di leggere in certi programmi di Matematica "risolvere un integrale"; frase che, da sola, testimonia di una notevole sprovvedutezza nella materia che si vorrebbe insegnare.

Nel campo della Matematica si possono affidare alla macchina le operazioni di illustrazione di situazioni geometriche, di tracciamento dei grafici di certe funzioni, le operazioni di analisi preventiva e di esplorazione per così dire "qualitativa" dei problemi, che verranno risolti con i procedimenti che si dovranno scegliere con una ulteriore analisi.

Grandissimo quindi è l'apporto che l'impiego intelligente di queste macchine può dare al lavoro dell'insegnante, risparmiando a questi la fatica più materiale e consentendogli di riservare i propri sforzi e la propria attenzione a quel lavoro che più propriamente gli deve essere riservato.

Ribadiamo infatti ancora una volta che l'opera dell'insegnante non finisce qui, così come non finisce qui il processo di apprendimento; da un certo punto di vista si potrebbe dire che incomincia qui. Invero il pensare che l'addestramento all'impiego delle macchine possa sviluppare oltre ogni dire le capacità logiche dei giovani è - a nostro parere - una grandissima sciocchezza.

Come abbiamo detto parlando dell'addestramento del guidatore di camion, anche la guida di chi si contenta di far correre la macchina senza curarsi di conoscere la struttura di questa, e meno che mai i fondamentali meccanici e scientifici che hanno diretto la sua costruzione, è in certo modo un comportamento razionale: perchè anche il guidatore più sprovveduto adotta certi comportamenti per certi fini, e sa che la vettura volta perchè egli ha girato il volante. Ma - ripetiamo ancora - si tratta di un collegamento tra cause prossime ed effetti immediati, collegamento che è

oggetto di addestramento piuttosto che di conoscenza. Anche i cani ammaestrati imparano a collegare certi comandi a certi comportamenti, e adattano i propri comportamenti a certe sequenze di circostanze esterne (presenza di strumenti, comportamenti dell'addestratore, ecc.). Ma non si può sostenere che essi si formino "una logica", come invece proclama qualche sprovveduto pedagogista, a proposito dei ragazzini che si fanno intossicare dai giochi elettronici (i cosiddetti "video-games", secondo il gergo in uso).

4. - Uno psichiatra americano, Howard Gardner, ha scritto recentemente un libro intitolato "Frames of mind. A theory of multiple intelligences"; in questa opera egli riscopre una verità che la civiltà occidentale conosceva da secoli (basti leggere i classici, per esempio Teofrasto, oppure Dante): cioè che esistono varie fisionomie dell'intelligenza umana. Egli ne identifica sette, e non è detto che l'elenco sia completo. Questa opera ci conforta nella opinione che non sia possibile pensare seriamente ad uno sviluppo della intelligenza basato sull'addestramento a premere tasti o a manovrare comandi vari; e parimenti che sia poco serio il pretendere di misurare l'intelligenza soltanto con il metro della acquisizione degli strumenti logico-deduttivi della Matematica; acquisizione che d'altra parte non si riduce all'addestramento di cui si diceva.

Pertanto noi pensiamo che accanto ai programmi (spesso utili quando sono ben fatti e non contengono strafalcioni) che abbiamo chiamato di tipo "illustrativo-addestrativo" occorra anche pensare a programmi che potremmo chiamare di tipo "analitico-logico-formativo". Ci occuperemo in seguito di precisare il tipo di programmi che così intendiamo designare. Prima vorremmo ribadire la nostra posizione a proposito di certi entusiasmi che noi riteniamo fuori luogo, dal punto di vista teorico e didattico.

I fautori entusiasti dell'impiego dei calcolatori nell'insegnamento delle materie scientifiche insistono spesso nel mettere in evidenza la possibilità di utilizzare i calcolatori per la simulazione dei fenomeni, sostenendo che in questo modo si potrebbero ottenere moltissimi vantaggi nell'insegnamento.

Non neghiamo che questo sia possibile, ma vorremmo osservare che un uso eccessivo ed imprudente di tecniche di simulazione porterebbe a correre il rischio di staccare quasi completamente il discente dalla realtà del fenomeno reale (quale che sia la scienza a cui si riferisce: chimica,

fisica o altra). Vorremmo osservare che già l'esperimento fisico fatto nel laboratorio didattico presenta al discente un fenomeno per così dire "addomesticato", così come il vetrino già preparato che lo studente mette sotto il microscopio costituisce una manipolazione notevole della materia vivente. Questa operazione volta ad isolare un aspetto della realtà è necessaria per la efficacia didattica, e per evitare allo studente la fatica di ripercorrere tutte le tappe della costruzione di una teoria. Ma occorre che questo distacco dalla realtà effettuale sia fatto con prudenza e moderazione; e soprattutto senza dimenticare di ricordare ogni volta che la operazione di isolamento è frutto di una scelta, che è basata su una teoria, la quale viene implicitamente accettata come valida, nel momento in cui la si espone. A nostro parere la simulazione esaspera queste scelte, che sono ovviamente una limitazione della realtà sperimentale, e rischia di rinchiudere il discente in un universo di fenomeni codificati, universo che si direbbe destinato ad essere stabile ed immutabile per natura sua.

Una seconda osservazione vorremmo fare a proposito dei programmi che vengono offerti numerosi sul mercato e che riguardano la possibilità di far comparire sui video-terminali dei diagrammi, delle figure, o addirittura di fare eseguire dei disegni. Capita di leggere spesso che così "si fa della Geometria con il computer". A nostro parere, questo modo di esprimersi traduce una concezione della Geometria che è clamorosamente falsa. Per dirla con poche parole, noi pensiamo che la Geometria non consista nel tracciamento di figure più o meno accurate, ma nella sistemazione rigorosa delle proposizioni che le riguardano. Questo pensiero era espresso dal prof. Chisini, nella forma paradossale che gli era abituale, con la frase: "La Geometria insegna a fare i ragionamenti giusti sulle figure sbagliate". E da parte sua Platone aveva già espresso questo pensiero osservando che l'oggetto delle considerazioni del geometra non è la figura, ma il concetto che essa simbolizza. Infatti soltanto i concetti possono raggiungere quel livello di astrazione, di generalità, quel collegamento logico necessario tra loro, che è dato soltanto dalla mente e da nessun esperimento fisico, per quanto raffinato possa essere.

Per ribadire ulteriormente questo pensiero, basti ricordare la prima proposizione che l'umanità abbia incontrato a questo livello di astrazione: quella che viene comunemente chiamata "Teorema di Pitagora". Orbene è noto che una delle conseguenze di questo teorema è la dimostrazione della esistenza di coppie di segmenti incommensurabili; cioè la dimo-

zione che non sia possibile dividere uno dei segmenti in parti uguali, in modo che l'altro si possa pensare costituito da un numero intero di tali parti.

E' questa una proposizione che non può essere oggetto di verifica sperimentale; anzi contrasta con le odierne concezioni della materia sensibile quale oggi la conosciamo; quindi è una proposizione che riguarda quell'ente che viene abitualmente chiamato "spazio geometrico", e la cui validità è dovuta soltanto al ragionamento.

Pertanto vorremmo concludere che la Geometria non si può fare con il computer, ma deve essere fatta con la testa; il computer potrà servire al massimo per tracciare delle figure più o meno esatte, ma non per sostituire il compito ineliminabile del ragionamento. Di conseguenza l'insegnamento della Geometria, nel senso che abbiamo cercato di precisare, non può essere sostituito con le esercitazioni grafiche al computer, se non nella testa di qualche sprovveduto insegnante che non ha capito che cosa sia la Geometria.

#### IV - Risolvere un problema

"Non entri alcuno, che non sia esperto di Geometria"  
(Platone)

1. - Le considerazioni che abbiamo svolto finora ci conducono a domandarci quale debba essere il carattere dei programmi che abbiamo chiamato "analitico-logico-formativi" e che dovrebbe accompagnare i programmi di tipo "illustrativo-addestrativo" per un impiego intelligente delle macchine elettroniche nell'insegnamento della Matematica.

A questo fine vorremmo fare una breve digressione, per meditare sul significato di quella operazione che viene abitualmente chiamata risoluzione di un problema matematico. Le cose che diremo sono di una grande banalità, ma pensiamo di dover ripeterle, per chiarire il nostro pensiero e per motivare ciò che avremo occasione di dire in seguito. Infatti, nella opinione comune, la risoluzione di un problema matematico viene associata alla applicazione di certe formule, ed alla esecuzione di certe procedure che si sono imparate e memorizzate, spesso senza aver memorizzato adeguatamente anche la loro motivazione. Questo atteggiamento è spesso più diffuso di quanto non si pensi, anche presso gli utilizzatori di strumenti della Matematica superiore. Così ci è capitato spesso di sentir persone di una certa cultura scientifica parlare di "equazioni risolubili" oppure "non risolubili" intendendo presumibilmente di parlare di equazioni le cui soluzioni sono date da formule scritte nei manuali ed equazioni invece per cui tali formule non si possono dare, ma che comunque sono risolubili con adeguati procedimenti. Questi atteggiamenti sono forse anche all'origine di quella specie di feticismo per la equazione algebrica di secondo grado, feticismo che pare dominare gli estensori dei programmi tradizionali di insegnamento della Matematica nelle scuole medie superiori e di conseguenza anche gli scrittori dei libri di testo.

Pare una banalità l'osservare che le soluzioni di una equazione, o in generale di un problema matematico, sono implicitamente contenute nei dati, beninteso quando il problema è ben posto; ne consegue che il procedimento di risoluzione di un problema consiste essenzialmente nel rendere esplicite le informazioni che i dati del problema contengono implicitamente; lo stesso concetto potrebbe essere espresso dicendo che si tratta di migliorare tali informazioni; questo miglioramento può anche consistere nella utilizzazione di informazioni che già si posseggono, forse anche

soltanto per ragioni storiche o per una evoluzione precedente della Matematica, evoluzione che ci ha fornito in certi campi un patrimonio di informazioni di cui possiamo disporre.

Così per esempio, nei riguardi della equazione algebrica di secondo grado, la ben nota formula risolutiva non è altro che la indicazione per utilizzare, con opportune operazioni razionali, cioè somme e sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, i procedimenti di calcolo della radice quadrata di un numero; procedimenti che sono considerati già conosciuti, e comunque sono tali che i loro risultati sono tabulati da tempo e considerati come elementari, in certi contesti. Analogamente, nel campo della trigonometria, si potrebbe dire che il problema della determinazione numerica degli elementi ignoti di un triangolo viene ricondotto alla utilizzazione dei calcoli eseguiti da Tolomeo, nel II secolo, oppure anche dei calcoli eseguiti da Napier e da Briggs per la determinazione dei logaritmi dei numeri più comunemente utilizzati.

2. - Molti problemi matematici vengono enunciati nella forma seguente: se si tratta di problemi geometrici "trovare un punto (o una retta, o un piano) tale che siano soddisfatte certe condizioni o che certe relazioni siano valide"; se si tratta di un problema che riguarda numeri: "trovare un numero tale che siano soddisfatte certe relazioni o certe condizioni".

Sotto questa forma possono essere formulati anche alcuni problemi che danno luogo a procedure ritenute elementari, codificate da tempo e spesso memorizzate a seguito di insegnamento elementare.

Tali procedure sono tanto frequenti che hanno dato luogo anche all'impiego di opportuni simboli, per rappresentare i loro risultati.

Per esempio: dati due numeri naturali  $a$  e  $b$ , usiamo indicare con il simbolo " $a:b$ " o con simboli considerati equivalenti quel numero razionale  $c$  tale che valga la relazione:

$$(1) \quad bc = a.$$

Analogamente, dato un intero positivo  $a$ , usiamo indicare con il simbolo " $\sqrt{a}$ " quel numero reale  $x$  tale che valga la relazione:

$$(2) \quad x^2 = a.$$

La Matematica si occupa di elaborare dei ragionamenti che rendono legittimo parlare di "numero" per certi enti che soddisfano alle condizioni (1) oppure (2). E' noto infatti che, se  $a$  e  $b$  sono interi, può non esistere un intero che soddisfa alla (1); tuttavia la Matematica estende il concetto di "numero" in modo tale che abbia senso parlare di un "numero che soddisfa" alla (1). In un certo senso, si potrebbe dire che la esistenza della entità che corrisponde alla  $c$  della relazione (1) è legittimata da considerazioni di due tipi:

- i) la possibilità di estendere ai nuovi "numeri" le leggi di calcolo formali che valgono per gli interi; questo punto di vista potrebbe essere chiamato "aspetto formale-algebrico" del problema;
- ii) la possibilità di escogitare dei procedimenti concreti per dare una rappresentazione soddisfacente degli enti considerati; questo punto di vista potrebbe essere indicato "topologico-algoritmico".

Il secondo dei punti di vista che abbiamo ricordato introduce a certe considerazioni che qui ci interessano, in relazione alle possibilità di utilizzazione degli strumenti di calcolo più potenti dell'ordinario.

A tal fine osserviamo che i "numeri" che soddisfano alle relazioni (1) oppure (2) possono essere rappresentati con opportune sequenze di tentativi ragionevolmente programmati. Questi procedimenti, ed altri analoghi, sono tipici dei problemi che vengono chiamati "inversi" e che appunto vengono enunciati con frasi della forma "trovare un certo ente  $x$  tale che...".

Come abbiamo già detto, alcuni procedimenti che riguardano certi problemi inversi sono talmente abituali che i loro risultati sono tabulati da tempo, e le procedure per la loro soluzione sono memorizzate ed insegnate in opportuni capitoli della aritmetica elementare.

Ma, dal punto di vista concettuale, il procedimento per la soluzione della (1) (cioè - ripetiamo - per trovare una rappresentazione della soluzione della (1) che soddisfi a determinati requisiti) non è diverso dal procedimento che conduce per esempio alla soluzione della equazione:

$$(3) \quad x^3 + 2x = 2.$$

Pare infatti che tra i due problemi esista la sola differenza che consiste nella maggiore complicazione dei calcoli riguardanti la (3) rispetto a quelli riguardanti la (2).

Una facile ispezione della (3) porta a concludere che il numero  $a$

positivo che soddisfa alla equazione deve soddisfare alle limitazioni:

$$(4) \quad 0 < a < 1$$

Osserviamo tuttavia che queste limitazioni sono state ottenute fondandosi sulle proprietà dei numeri razionali positivi; in particolare osservando che la espressione che è al primo membro della (3), considerata come una funzione della variabile  $x$ , è crescente in tutto l'intervallo de terminato dalle disequaglianze (4).

Si trae di qui una prima conseguenza, la quale potrebbe essere enunziata dicendo che il problema di risolvere la (3) si riduce ad una procedura razionale, che porta metodicamente a migliorare le informazioni fornite dalla (4); tale procedura potrebbe consistere, per esempio, nel ricercare un intervallo più ristretto nel quale è compreso il numero e che si cerca. Questa ricerca non è codificata nelle nozioni di aritmetica e di algebra che si danno tradizionalmente nei corsi di Matematica, ma è re sa possibile dalla utilizzazione di mezzi di calcolo più potenti, per esempio anche da sole macchinette tascabili programmabili oppure "scienti fiche".

Vorremmo tuttavia ribadire che la ricerca di una procedura cosiffatta (ed anche di altre moltissime analoghe per la soluzione di problemi ma tematici) è fondata esclusivamente sul ragionamento, sulla deduzione, che si fonda sulla utilizzazione delle proprietà di ordinamento dei numeri del campo razionale.

3. - Per chiarire ulteriormente ciò che abbiamo detto alla fine del precedente paragrafo, e che costituisce una osservazione fondamentale da tener presente per dirigere il lavoro didattico, prendiamo in considerazione un altro esempio elementare. Sia da eseguire una divi sione tra interi naturali, cioè la operazione di ricerca di quoziente e resto come viene insegnata nelle scuole elementari. Tale operazione potrebbe essere considerata come la soluzione di un problema enunciato nel modo seguente: dati due nu meri naturali  $a$ ,  $b$ , trovare altri due numeri naturali  $q$  ed  $r$ , tali che valgano le relazioni:

$$(1) \quad a = qb + r \quad 0 \leq r < b$$

Ovviamente la risposta a questo problema, che sembra ed è molto semplice, è fondata su una analisi logica, che si fonda a sua volta sulle proprietà dell'insieme dei numeri naturali. Infatti  $q$  è il massimo di un insieme di interi naturali costituito dai numeri che, moltiplicati per  $b$ , danno risultato non maggiore di  $a$ ; la esistenza del massimo di una classe cosiffatta di numeri è garantita da una proprietà fondamentale dell'insieme dei naturali. In secondo luogo si ha che, dati tre numeri interi naturali:  $x, y, z$ , se è:

$$(2) \quad x \leq y$$

è anche

$$(3) \quad xz \leq yz.$$

Su queste basi è possibile dimostrare la esistenza e la unicità dei due interi naturali  $q$  ed  $r$  che soddisfano alla (1). Ovviamente questa dimostrazione non viene data nei corsi di aritmetica elementare, perchè le proprietà richiamate sono considerate "evidenti" o "naturali". Ma occorre talvolta richiamarle per dare delle risposte corrette a certi problemi. Del resto non sempre si incontrano problemi così semplici: le considerazioni che abbiamo svolto finora a proposito del problema posto dalla ricerca di due interi  $q$  ed  $r$  che soddisfino alla (1) possono diventare più complicate se, sempre in presenza di due interi naturali  $a$  e  $b$  (il secondo diverso da zero), e per ogni intero  $n$ , si chiede il massimo intero  $q(n)$  tale che si abbia:

$$(4) \quad a \cdot 10^n \equiv b \cdot q(n).$$

Invero in questo caso può avvenire che i numeri  $q(n)$  costituiscano una successione infinita, perchè in forza del Teorema fondamentale della divisibilità, può avvenire che non esista alcun intero naturale  $q$  tale che si abbia:

$$(5) \quad a \cdot 10^n = b \cdot q.$$

Pertanto, partendo da una coppia di naturali, si può costituire una successione infinita, anche in relazione a problemi così semplici. Ognuno

riconoscerà che queste circostanze si presentano quando a e b non hanno fattori comuni ed i fattori di b non sono tutti uguali a 2 oppure a 5, cioè ai fattori della base di numerazione abitualmente adottata per rappresentare i numeri.

E' facile riconoscere nel problema appena enunciato, quello che conduce al procedimento per la rappresentazione decimale del quoziente tra due interi naturali a e b; procedimento che può dar luogo ad una successione infinita di rappresentazioni decimali.

Ci si trova quindi in una posizione analoga a quella originata dai problemi relativi alle equazioni (2) e (3) del paragrafo precedente; anche in questi casi, generalmente, viene originata una successione infinita di numeri razionali. La differenza è data dal fatto che nel problema enunciato in questo paragrafo la successione risulta periodica, a differenza di quanto avviene per esempio per la equazione (2) del paragrafo precedente.

Invero nel caso di questa ultima equazione, la successione infinita di cui si tratta è quella degli interi  $q(n)$ , ognuno dei quali, per ogni n, è il massimo per cui vale la relazione:

$$(6) \quad a \cdot 10^{2n} \geq \{q(n)\}^2.$$

V - Come impiegare il computer in modo intelligente?

"La machine d'arithmétique fait des effets qui approchent plus de la pensée que tout ce que font les animaux; mais elle ne fait rien qui puisse faire dire qu'elle a de la volonté, comme les animaux."

(Blaise Pascal - Pensées)

1. - Abbiamo visto che la soluzione di problemi matematici porta molto frequentemente a dei procedimenti che sostanzialmente si riducono a dei tentativi razionalmente programmati. Di questo genere sono molti dei procedimenti che conducono a risolvere i cosiddetti "problemi inversi", cioè quelli che possono essere enunciati dicendo: "Trovare un punto, o un numero, o certi numeri, tali che siano soddisfatte certe condizioni".

Questi tentativi programmati e razionalizzati sono alla base delle procedure che vengono insegnate anche nella aritmetica elementare; per esempio nei procedimenti di divisione o di estrazione di radice. Possiamo quindi fare due osservazioni, del tutto elementari: anzitutto, la programmazione razionale dei tentativi è fondata sulla conoscenza delle strutture del linguaggio matematico, come abbiamo già detto (proprietà formali delle operazioni sui numeri interi e razionali, proprietà di ordinamento, ecc.). In secondo luogo, nella soluzione di questi problemi è possibile utilizzare in modo ragionevole il calcolatore, perchè il suo impiego può risparmiare molta della fatica richiesta dai tentativi ragionevoli, ed anzi può stimolare la invenzione di nuovi procedimenti, che sarebbero abitualmente non applicabili se i calcoli dovessero essere eseguiti a mano.

Occorre tuttavia che le operazioni eseguite dal computer siano progettate in modo adeguato al fine che si vuole conseguire e siano valutate in modo critico.

Il problema della progettazione sarà visto in seguito, perchè riguarda uno degli aspetti più fondamentalmente formativi dell'impiego intelligente del computer nella scuola. Qui vogliamo spendere qualche parola a proposito della valutazione e della critica delle informazioni che il computer ci possono fornire; ci limiteremo alle informazioni che ci vengono date sotto forma di numeri, perchè questo è il caso più frequente, e quello che può dare luogo alle considerazioni più interessanti dal punto di vista della formazione matematica.

Abbiamo detto sopra che spesso la soluzione di un problema matematico si riduce al miglioramento delle informazioni che sono implicitamente contenute nei dati, se il problema è ben posto.

Questo miglioramento, nella maggior parte dei casi, si riconduce a restringere certi intervalli numerici nei quali sono contenuti i numeri che si cercano come risposte alle domande del problema. Nelle trattazioni teoriche questa operazione di restringere un intervallo potrebbe proseguire indefinitivamente, perchè ogni stadio di miglioramento fornisce delle informazioni che permettono la esecuzione del passo successivo.

Ma ci sembra venuto il momento di distinguere la situazione teorica da quelle che si presentano quando la Matematica è impiegata per descrivere, conoscere e quindi anche dominare gli oggetti della realtà che ci circonda (oggetti della Geometria, della Fisica, della Economia, ecc.).

Riflettendo anche solo un poco, ci accorgiamo che nella maggior parte dei casi i problemi matematici che si pongono in relazione a queste dottrine traggono i loro dati da operazioni concrete, eseguite o immaginate, sulle grandezze di cui si parla: tali operazioni sono conteggi (nel caso della Statistica), o misure (nel caso della Geometria o della Fisica).

Di conseguenza le informazioni di partenza (i dati del problema), da cui dobbiamo prendere le mosse, sono quasi sempre affette da una incertezza più o meno grande, che dipende dalla minore o maggiore precisione delle misure, oppure anche dagli scopi pratici e teorici che il problema si pone.

Queste osservazioni, per quanto banali, ci portano direttamente al problema della valutazione del significato delle informazioni che ci sono fornite e di quelle che ci sono richieste.

Per fare un esempio banale, appare chiaramente necessario interpretare in forma critica la informazione che viene data da certi testi di Geografia, che assegna l'altezza di un monte (per esempio il Bianco) fino ai centimetri.

Infatti tali cifre sono difficilmente determinabili, ed ancora più difficilmente verificabili. Pertanto la ostentazione di tante cifre decimali, che viene spesso gabellata come un omaggio alla "precisione matematica" deve essere valutata con certe precauzioni; analoghe considerazioni dovrebbero essere fatte a proposito di certe informazioni fornite per esempio dai bilanci di certe società, che danno somme di denaro fino alla singola lira su bilanci che assommano a migliaia di miliardi. Anche in

questo caso si tratta di informazioni che non sono false nel senso abituale del termine, ma che hanno un significato da valutarsi criticamente. Il trascurare questa precauzione porta a confondere la vera precisione matematica con altri tipi di informazione, che non sono in linea di principio falsi ed illegittimi per sè, ma che hanno ben poco a che vedere con la precisione matematica.

In generale si può dire che i dati dedotti con conteggi o con misure sono in ogni caso affetti da incertezze, che spesso vengono impropriamente chiamate brevemente "errori di misura"; pertanto ogni volta che si assegna un determinato numero a come risultato di un conteggio o di una misura, in realtà si assegna un intervallo

$$(1) \quad a' < a < a''$$

entro il quale il numero  $a$  è contenuto; come è noto, i numeri  $a'$  ed  $a''$  vengono chiamati valori "per difetto" e "per eccesso" del dato  $a$ , e la differenza:

$$(2) \quad a'' - a' = d$$

viene chiamata impropriamente errore.

In generale, quando si assegna il dato  $a$  sotto forma di frazione decimale, con un dato numero di cifre dopo la virgola, si intende assegnare un valore per difetto; il corrispondente valore per eccesso si ottiene, con queste convenzioni, aumentando di una unità l'ultima cifra che viene scritta.

Così per esempio scrivendo;

$$(3) \quad \sqrt{2} = 1.14 \dots$$

si intende indicare convenzionalmente la coppia di disuguaglianza:

$$(4) \quad 1.14 < \sqrt{2} < 1.15.$$

La minima potenza del 10 (o in generale della base di numerazione) che supera  $d$  viene spesso chiamata anche "ordine di approssimazione" della misura o della informazione che ci è fornita dalle relazioni (1).

Esistono delle regole, dettate dalle teorie di calcolo numerico,

che permettono di valutare gli errori che si commettono operando su valori approssimati: è infatti assolutamente evidente che l'ordine di approssimazione dei risultati di un calcolo non può mai essere superiore a quello dei dati di partenza: la Matematica trasforma le informazioni, ma non le può inventare. Ed uno degli aspetti fondamentali del buon uso della Matematica è dato proprio dalla possibilità di fornire informazioni esatte e non inventate.

Senza entrare nei particolari dei trattati di calcolo numerico classico, possiamo ricordare qui qualche immediata osservazione, che servirà di guida per la utilizzazione intelligente dei mezzi di calcolo.

A tal fine, si consideri un secondo insieme di relazioni, analoghe alle (1), che riguardano un secondo numero  $b$ :

$$(5) \quad b' < b < b'' .$$

Nella ipotesi che i numeri considerati siano tutti positivi, si ottiene ovviamente, per le operazioni razionali:

$$(6) \quad a' + b' < a + b < a'' + b''$$

$$(7) \quad a' \cdot b' < ab < a'' \cdot b''$$

$$(8) \quad a' - b'' < a - b < a'' - b'$$

ed infine, nella ipotesi che nessuno dei numeri (5) sia nullo:

$$(9) \quad a' / b'' < a / b < a'' / b' .$$

Le relazioni (6) ... (9) sono sufficienti per permetterci di enunciare due regole fondamentali che riguardano il calcolo con numeri rappresentanti delle misure non esatte, cioè i numeri che nascono dalla applicazione pratica della Matematica. Le regole sono le seguenti:

- i) l'ordine di approssimazione dei risultati di una operazione aritmetica non è mai superiore a quello dei numeri sui quali essa viene eseguita;
- ii) è conveniente che gli ordini di approssimazione di due numeri sui quali si opera con una operazione aritmetica siano uguali: in caso contrario l'ordine di approssimazione del risultato è inferiore a quello

del termine che ha ordine minore; pertanto le informazioni in più, che si hanno con le misure che riguardano il termine che ha ordine di approssimazione superiore, risultano sprecate.

Le poche osservazioni elementari che abbiamo fatto si prestano ad una utilizzazione intelligente delle macchine calcolatrici; va infatti osservato che in generale le macchine, anche le più elementari e tascabili, forniscono almeno 8 cifre della rappresentazione decimale di un numero. Il che induce spesso gli utenti ad adottare tutte le cifre che la macchina fornisce per il risultato di una operazione, senza curarsi di verificare se le informazioni che così si ottengono sono vere oppure inattendibili.

D'altra parte il calcolo diretto a mano dei primi e degli ultimi membri delle relazioni (6) ... (9) è spesso molto faticoso. Invece con l'impiego di macchine, anche poco potenti, l'insegnante accorto potrà verificare direttamente quale sia la portata e la validità delle informazioni che si hanno utilizzando la Matematica nella descrizione e nella conoscenza degli oggetti reali; quindi potrà dare una giusta idea di questa scienza, sfatando la immagine di quasi-magia che essa ha per qualche soggetto, ma inducendo invece la immagine di razionale elaborazione delle informazioni certe che si posseggono per avere ulteriori informazioni, delle quali si conosce il grado di certezza.

Per spiegare meglio ciò che intendiamo dire, pensiamo ad un problema di geometria pratica, che consiste nel dare la lunghezza della ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono lunghi rispettivamente 23.7 cm e 37.4 cm. Le informazioni precedenti possono essere tradotte in disuguaglianze che determinano gli intervalli in cui sono compresi i due numeri a e b che danno le lunghezze vere dei cateti: si ha quindi

$$(10) \quad \begin{cases} 23.7 < a < 23.8 \\ 37.4 < b < 37.5 \end{cases}$$

Quindi per il quadrato  $c^2$  della ipotenusa, a norma della (6) si hanno le relazioni:

$$1960.45 < c^2 < 1972.69.$$

Operando con una macchina che eseguisca anche la radice quadrata si

avrà quindi:

$$44.27.. < c < 44.42.$$

Queste sono ovviamente le sole informazioni che si possono dare sulla lunghezza della ipotenusa, a partire dalle informazioni (10); come si vede, l'ipotenusa può essere data al massimo con un errore che è dell'ordine di 0.2 cm. Ogni altra informazione, che qualcuno sarebbe tentato di dare osservando il numero di cifre fornite dalla macchina, è fantasiosa e quindi falsa.

Considerazioni analoghe si possono fare quando si tratta di trovare un cateto di un triangolo rettangolo, dati che siano l'altro cateto e la ipotenusa, quando le loro misure siano approssimate. Per esempio, mentenendo le notazioni già introdotte, si ha:

$$\begin{cases} 18.3 < c < 18.4 \\ 13.7 < a < 13.8. \end{cases}$$

Tenendo conto della (7) si ha:

$$\begin{cases} c' = 334.89 < c^2 < 338.56 = c'' \\ a' = 187.69 < a^2 < 190.44 = a''. \end{cases}$$

Tenendo conto della (8) si ha ora:

$$c' - a'' = 144.45 < c^2 - a^2 < 150.87 = c'' - a'$$

e di qui

$$12.01 < b = \sqrt{c^2 - a^2} < 12.29.$$

Anche in questo caso queste sono le sole informazioni che possiamo trarre dai dati, dopo i calcoli; ogni altra informazione che volesse essere più precisa, per esempio presentando altre cifre, dopo il punto decimale della misura richiesta, è ovviamente falsa.

Vorremmo aggiungere a questo esempio qualche considerazione che ri-

guarda l'impiego di quelli che nei testi di Aritmetica elementare vengono spesso chiamati numeri fissi. Il più celebre di questi è la costante di Archimede, che viene indicata in Italia con il simbolo  $\pi$  (pi greca).

La Matematica ha dedicato allo studio del rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro numerosissimi studi; un dato che chiude delle ricerche secolari è quello fornito dal celebre teorema di Lindemann, il quale dimostra che la costante di Archimede non può essere radice di alcuna equazione algebrica avente coefficienti interi: si tratta quindi di un numero irrazionale, che non può essere rappresentato in forma finita in nessun sistema di numerazione. Orbene è diffusa l'abitudine di adottare come valore di  $\pi$  il numero razionale 3.14.

In base a ciò che è stato detto poco sopra, è chiaro che l'adottare sempre, metodicamente, questo valore per la costante  $\pi$  equivale spesso a sprecare delle informazioni che eventualmente si possedessero in relazione ai problemi che si trattano. Per chiarire ciò che intendiamo dire, consideriamo il problema seguente: calcolare la lunghezza della circonferenza inscritta nel triangolo equilatero di lato unitario. Con considerazioni elementari si trova che il diametro di tale circonferenza vale

$$(10') \quad d = 1/\sqrt{3};$$

si hanno quindi per  $d$  le limitazioni:

$$(11) \quad 0.5773502 < d < 0.5773502.$$

L'informazione relativa alla costante di Archimede deve essere tradotta con le relazioni:

$$(12) \quad 3.14 < \pi < 3.15.$$

Di conseguenza, ricordando la (7), si ottiene, per la lunghezza  $\gamma$  della circonferenza la coppia di limitazioni:

$$(13) \quad 1.812 < \gamma < 1.818.$$

Pertanto molte delle cifre che l'impiego delle macchine ci fornisce sono prive di significato, e molte delle informazioni date dalla (11) risultano sprecate.

Analoghe considerazioni si possono svolgere quando si prendono in considerazione molte cifre di  $\pi$  e poche delle misure che interessano.

L'impiego delle macchine permette di eseguire facilmente le verifiche che si riferiscono ai calcoli che abbiamo eseguito ed ad altri analoghi e permette quindi di dare della Matematica una immagine corretta, cioè quella di una scienza che, quando è bene utilizzata, aiuta a trasformare le informazioni ed a trovarne delle nuove, ma non ad inventarle.

2. - Abbiamo dato, nel precedente paragrafo, qualche cenno sulla opportunità, o addirittura necessità, di valutare criticamente le informazioni che ci sono fornite dalle macchine (o anche, in generale dalle formule) quando sono usate senza precauzioni: si rischia infatti di credere che la Matematica possa "inventare" delle informazioni che non esistono. Ed è inutile aggiungere che in questo modo si rischia anche di dare una immagine distorta della Matematica, o comunque di non formare alla sua applicazione ragionevole.

Altre osservazioni potrebbero essere fatte a proposito della rappresentazione dei numeri razionali; questa viene data dalle macchine (salvo qualche eccezione) sotto forma di frazioni decimali, cioè con una parte intera e un certo numero di cifre dopo il punto decimale. Il numero di tali cifre è determinato ovviamente dalla capacità della macchina che si usa. Ma ovviamente la rappresentazione non potrà mai essere completa nel caso in cui si tratti di rappresentare un numero irrazionale, o anche un numero razionale che dà origine ad una rappresentazione decimale periodica.

L'impiego sempre più diffuso delle macchine rende quindi opportuna una precisazione sulle diverse maniere di rappresentare un medesimo ente, e la giustificazione della loro equivalenza.

Infatti si possono presentare delle situazioni che rendono perplesso l'allievo, se accada che egli esegua la medesima operazione in due modi diversi.

Per spiegare ulteriormente il nostro pensiero, consideriamo il seguente esempio: sia da calcolare la somma dei tre numeri razionali rappresentati dalle frazioni:

$$(1) \quad 1/3 + 8/15 + 4/75 = 69/75 = 23/25 = 0.92 \dots$$

Qualora si adotti una macchina calcolatrice, che per esempio dia sei cifre dopo il punto decimale, si ha che la macchina esegue le divisioni indicate dalle frazioni prima della somma di queste. Ne consegue che alcuni numeri razionali possano essere rappresentati in forma periodica, per esempio nel caso in esame:

(2)	$1/3$	=	0.333333	
	$8/15$	=	0.533333	
	$4/75$	=	0.053333	
	Totale		0.919999	-

Si incontrerebbe quindi una situazione apparentemente paradossale, cioè il fatto che la medesima operazione, fatta in due modi diversi, possa dare luogo a due risultati apparentemente diversi.

Ovviamente la soluzione del paradosso apparente si ottiene subito osservando che non si può scrivere

(3)  $1/3 = 0.333333$

ma si dovrebbe scrivere

(4)  $0.333333 < 1/3 < 0.333334$

ed analogamente si dovrebbero scrivere analoghe coppie di disuguaglianza per gli altri addendi. Di conseguenza il totale dovrebbe essere rappresentato con le disequazioni:

(5)  $0.919999 < \text{totale} < 0.9200002$

L'insegnante accorto può trarre di qui l'occasione per chiarire il significato delle informazioni che si possono ottenere con le diverse convenzioni di rappresentazione degli enti della Matematica, e delle operazioni che si eseguono su di essi.

3. - Nella seconda parte di questo lavoro daremo degli esempi di utilizzazione dei calcolatori di ogni potenza (ma sempre del tipo tascabile o poco più) ad ogni livello di scuola e per ogni stadio della maturazione psicologica e razionale degli allievi.

In linea generale ribadiamo che la soluzione di un problema matematico richiede, in modo ineliminabile, una analisi logica della strategia risolutiva e delle procedure per rendere esplicite le soluzioni, sempre nei limiti delle informazioni che la Matematica può fornire, e dei quali abbiamo già detto poco sopra.

Ricordiamo che nella soluzione di un problema il procedimento logico fondamentale è quello di "analisi", su cui aveva già meditato la filosofia greca, e della quale ha scritto magistralmente F. Enriques con le seguenti parole:

"La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento "analitico" che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici.

In questa "analisi" si comincia col supporre che il problema proposto  $P$  sia risolto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risolto in forma del precedente, finchè si arrivi ad un problema  $R$  che si sappia effettivamente risolvere. La "sintesi" consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema  $R$ , e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso, fino a dimostrare la soluzione di  $P$ . Questa dimostrazione è necessaria, perchè coll'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di  $P$  sono soluzioni di  $R$  ma non viceversa. Insomma la analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che lo determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle Idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi, la quale - da sola - fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte.

.....

Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel progresso moderno delle scienze matematiche; su questa evoluzione sembra aver influito massimamente il fatto che il metodo di risoluzione detto dei "luoghi geometrici" è divenuto, con Cartesio, il fondamento di

"un'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria.

Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espressa da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di "Geometria analitica", e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga ha preso il nome di "analisi matematica". Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre ad una forma comune più generale, tutti i problemi di geometria, di meccanica, ecc.."

Accanto a questo intervento ineliminabile della analisi logica, l'impiego delle macchine richiede anche una analisi del significato e delle procedure che conducono al calcolo dei valori dei numeri che danno le soluzioni dei problemi, o - più in generale - delle procedure che conducono alla espressione esplicita delle informazioni contenute implicitamente nei dati.

In questo lavoro si incontra la situazione paradossale, secondo la quale l'impiego delle macchine poco potenti ed evolute, risulta più utile di quello delle macchine potenti ed evolute ai fini della formazione mentale degli allievi; infatti, con le macchine poco potenti il programmatore dei calcoli è costretto a prendere coscienza di ogni passaggio logico dei calcoli, e quindi a prendere coscienza delle leggi fondamentali dei numeri e delle operazioni su di essi.

## PARTE II - Spunti didattici

"Little things please little minds"  
(Rudyard Kipling - Stalky & Co)

### VI - La utilizzazione dei calcolatori nella didattica della Matematica.

1. - Nelle pagine che seguono daremo qualche spunto didattico dell'impiego dei calcolatori nell'insegnamento della Matematica, nelle scuole di ogni ordine e grado. Ovviamente l'insegnamento della Matematica è concepito secondo le concezioni che abbiamo cercato di presentare nella Parte I, e precisamente nel Cap. I. Precisamente noi pensiamo che con l'insegnamento della Matematica si dovrebbe mirare ad allenare il discente alla analisi dei procedimenti logici che si impiegano per la soluzione di un problema matematico o tecnico, ed alla conoscenza della sintassi dei linguaggi che conducono alla costruzione delle soluzioni, non tanto nella loro materialità, ma piuttosto nei principi informatori.

Ovviamente, in questo secondo caso, il conseguimento dei risultati (radici delle equazioni, rappresentazione grafica delle funzioni, prospettive delle figure spaziali, ed altre cose che vengono elencate nei cataloghi delle macchine qualificate come "intelligenti") interessa meno - ripetiamo - della analisi dei procedimenti risolutivi e delle procedure per comandare alle macchine la ricerca e la elaborazione di certe informazioni numeriche, logiche o di altro tipo.

Per queste ragioni vorremmo classificare i programmi che presenteremo come di tipo "analitico-logico-formativo"; con essi si mira infatti, in primo luogo, alla formazione scientifica, alla analisi dei momenti logici delle teorie e delle loro applicazioni. La capacità di utilizzazione dei vari linguaggi e delle procedure stabilite da altri viene in questo caso conseguita come un sottoprodotto della analisi logica e della abitudine alla trascrizione rigorosa dei procedimenti mentali, simbolizzati con i vari linguaggi che si utilizzano per "dialogare" con le macchine dei vari tipi e delle varie generazioni.

Ripetiamo che il nostro atteggiamento non significa tentativo di sostituzione dei programmi di tipo "illustrativo-addestrativo" di cui abbiamo già detto. Noi pensiamo infatti che questi programmi abbiano un posto ben preciso ed una loro efficacia, soprattutto se ben fatti ed impiegati

in modo intelligente; ma crediamo pure che essi siano molto vicini a quella che si usa chiamare "istruzione programmata" e che, in particolare, non abbiano nulla a che vedere con la formazione logico-analitica che vorremo dare con un diverso impiego delle macchine. Impiego che - ripetiamo - non esclude l'altro, ma è sostanzialmente diverso e quindi può essere condotto in modo parallelo a quello dei programmi addestrativi.

Per illustrare ulteriormente il nostro pensiero con un esempio banale, consideriamo un problema che si incontra spesso negli esercizi degli studenti di Matematica: il passaggio della rappresentazione di un intero con le abituali convenzioni posizionali decimali alle convenzioni che utilizzano un altro intero come base di numerazione; tale problema viene abitualmente chiamato "problema del cambiamento di base".

E' chiaro che un problema cosiffatto porge all'insegnante che sia colto ed accorto molti spunti di formazione al pensiero matematico; per esempio la riflessione sulle convenzioni per la rappresentazione degli interi, la riflessione sulle operazioni che conducono alla rappresentazione stessa, la distinzione tra proprietà dei numeri che conseguono dalla loro definizione, e le proprietà della rappresentazione convenzionale, e così via. Ovviamente questi spunti didattici sono molto più importanti del fatto brutto, che per esempio il numero che con le convenzioni decimali viene rappresentato con 15, con la numerazione in base 2 viene rappresentato con 1111 e con la rappresentazione in base 3 viene rappresentato con 120.

Noi pensiamo che la utilizzazione del programma che trasforma la rappresentazione di un intero da una base ad un'altra sia fatta ben raramente: tra l'altro è noto che le macchine lavorano in base 2 e trasformano poi i risultati in una forma che è più comoda per noi.

Ma pensiamo anche che sia istruttiva l'analisi dei procedimenti che conducono da una all'altra delle rappresentazioni.

Pare a noi che in un problema come quello del cambiamento di base (ed in molti altri) si possano distinguere due momenti, i quali offrono all'insegnante accorto e colto la possibilità di una azione formativa. Tali momenti nella pratica sono spesso difficilmente separabili, ma pensiamo che sia opportuno distinguerli con una analisi logica, per poter prendere coscienza dei procedimenti che conducono razionalmente alla soluzione di un problema matematico.

Il primo momento è ovviamente quello della rimediazione delle leggi principali che reggono la rappresentazione convenzionale degli interi in una certa base, ed anche la ricerca delle valutazioni approssimate dei nu

meri razionali nella stessa base. Ricordiamo ancora una volta che tali convenzioni sono basate sulle proprietà formali dei numeri e delle loro operazioni; quindi la rimeditazione sulle convenzioni di rappresentazione potrà offrire la opportunità di ricordare le proprietà formali dei numeri, e di distinguere queste dalle proprietà che conseguono semplicemente dalle convenzioni di rappresentazione.

Un secondo momento è quello della effettuazione delle operazioni oppure della stesura del programma di soluzione. In questo momento l'insegnante accorto potrà attirare l'attenzione del discente sulle operazioni elementari che conducono al calcolo o alla approssimazione delle soluzioni, o comunque alla esplicitazione di informazioni che sono contenute implicitamente nei dati del problema. Noi pensiamo che questo sia un momento formativo molto importante, come lo è ogni riflessione sui procedimenti mentali che noi consideriamo come "naturali" e che invece debbono tutti essere presi in considerazione, ed esplicitamente comandati alla macchina.

Per esempio ogni operazione naturale, che nelle soluzioni "a mano" consiste nella scrittura di un numero che è frutto di un calcolo intermedio, deve essere esplicitata con la introduzione di tale numero in una memoria dalla quale esso viene esplicitamente prelevato poi. Inoltre, perchè i calcoli vadano a buon fine, è necessario che siano eseguiti secondo una rigorosa gerarchia logica; ed anche la ricerca di questa gerarchia costituisce un esercizio utile per chi invece ha forse l'abitudine di eseguire i calcoli senza un ordine premeditato ed analizzato a priori.

Tuttavia - ripetiamo - non escludiamo che sia anche utile insegnare agli alunni ad utilizzare i programmi già fatti, che danno in pochissimo tempo la rappresentazione di un numero da una base ad un'altra. Solo osserviamo che gli scopi che ci si prefigge sono nei due casi diversi, e che pensiamo utile precisare gli scopi, per evitare le polemiche inutili e vuote.

Analoghe considerazioni possono essere fatte a proposito degli altri programmi che qui proponiamo. Pare a noi che sia interessante per la formazione matematica dei discenti non tanto la utilizzazione dei programmi quanto la loro costruzione; perchè pensiamo che questa operazione debba condurre necessariamente alla rimeditazione delle leggi fondamentali della Matematica e quindi al loro possesso sicuro; ed inoltre conduca anche alla utilizzazione delle facoltà di invenzione e di sperimentazione, che sono pure fondamentali per lo sviluppo della personalità razionale del

giovane.

2. - Nelle pagine che seguono daremo qualche spunto di utilizzazione delle piccole macchine per l'insegnamento della Matematica. E' chiaro che da remo delle indicazioni che vanno in direzione diversa da quelle dei corsi di informatica; questi sono infatti diretti ad addestrare gli utilizzatori di macchine sempre più perfette. Invece - ripetiamo - pare a noi che le macchine meno potenti e più rudimentali possano servire di più agli scopi che abbiamo in vista, cioè a dare una immagine della Matematica diversa da quella tradizionale, ed a formare alla analisi logica.

Spesso useremo il vocabolo "macchinette" per indicare questi apparati, che sono nella maggior parte tascabili, anche quando permettono una interessante programmazione.

E' praticamente impossibile passare in rassegna tutte le macchinette che sono offerte sul mercato. Possiamo tuttavia pensare di poter dare una classificazione abbastanza rudimentale distinguendo nelle macchinette esistenti tre livelli, che presenteremo qui di seguito, accennando per ognuno di essi le possibili utilizzazioni nell'insegnamento. Ulteriori particolari sulla utilizzazione saranno dati nei capitoli seguenti.

Ad un primo livello potremmo porre le macchinette tascabili che permettono le sole operazioni razionali e la radice quadrata, con una sola memoria. Queste macchinette sono state spesso sconsigliate, con la ragione che esse istigano alla pigrizia i ragazzi, che non vogliono neppure più fare la fatica di memorizzare la tavola pitagorica. Questa tentazione di pigrizia nell'esercizio si estende poi alle regole delle operazioni aritmetiche.

E' chiaro che l'insegnante deve curare che questi difetti non si instaurino negli allievi, verificando per esempio in pubblico ed alla lavagna che essi sanno fare speditamente le operazioni tradizionali.

Ma le macchinette permettono di verificare con speditezza la validità delle leggi formali (commutativa, distributiva, associativa) delle operazioni (somma e prodotto) dell'aritmetica. Inoltre esse possono permettere di verificare speditamente su numerosi esempi che le abituali procedure per la esecuzione delle operazioni (somma, prodotto, sottrazione, divisione) non sono altro che applicazioni delle leggi formali dell'aritmetica e delle convenzioni decimali della rappresentazione dei numeri interi.

Le macchinette, inoltre, permettono di eseguire rapidamente e senza

fatica le operazioni con le frazioni, evitando le ripetizioni di esercizi concettualmente poco utili, come quelli che impongono di ridurre le frazioni al minimo comun denominatore ed altre prescrizioni che si incontrano di solito nei libri e che hanno il solo scopo di facilitare i calcoli, evitando i numeri interi troppo grandi, ma che a volte attirano l'attenzione del discente più di altre prescrizioni, che sono veramente importanti ma che danno luogo ad esercizi meno noiosi.

Queste macchinette permettono anche di svolgere e di verificare la validità delle considerazioni sul calcolo approssimato e sul significato delle informazioni che abbiamo svolto nel cap. V della I Parte e che rivestono - a nostro parere - una importanza fondamentale per la formazione matematica degli studenti.

Infine la utilizzazione delle macchinette, anche a livello elementare, potrà rendere facile e spedita la introduzione di relazioni logicamente e concettualmente importanti, come quelle di congruenza e di omomorfismo. La costruzione dell'anello dei resti rispetto ad un modulo fissato, e quindi le conseguenti operazioni di cambiamento di base di numerazione, possono essere oggetto di numerosi esercizi, ai quali l'impiego delle macchinette può togliere ogni aspetto di fatica mentale o di noia, per lasciare soltanto la possibilità di apprendimento e di utilizzazione dei concetti.

Ad un secondo livello vorremmo porre le macchinette tascabili che vengono qualificate come "scientifiche" nei cataloghi delle case costruttrici.

Le funzioni scientifiche abitualmente introdotte sono i logaritmi, l'esponenziale, le funzioni trigonometriche e le loro inverse.

Queste possibilità rendono superflue le ore di esercizio dedicate all'impiego delle tavole logaritmiche, che sono ormai da considerarsi superate, data l'approssimazione che si può ottenere con una qualunque macchina tascabile. Invece questa permetterà di verificare direttamente le proprietà formali della funzione logaritmo, e quindi di dare una idea precisa del suo impiego (numeri indici, ordini di grandezza, ecc.).

Sarà poi facile impiegare i logaritmi per i calcoli che non sono direttamente possibili sulla tastiera (potenze con esponente maggiore di 2 o frazionario, radici con indice diverso da 2 o frazionario e così via).

In ogni caso la verifica del significato e delle approssimazioni può essere fatta frequentemente, in modo che si possano ottenere i vantaggi della critica delle informazioni di cui si diceva sopra.

Le funzioni trigonometriche poi possono permettere di superare le vecchie esercitazioni di lettura sulle tavole logaritmico-trigonometriche; quindi gli esercizi di trigonometria possono diventare rapidi e comodi, in modo che questo capitolo della geometria elementare riprenda le modeste proporzioni che dovrebbe avere, e lasci il posto ad altri, concettualmente più formativi e più interessanti.

Ad un terzo livello vorremmo porre le macchinette programmabili, che adottano vari linguaggi di programmazione (nella maggior parte dei casi il BASIC, in una delle sue numerose varianti).

A questo livello i pericoli di scambiare l'insegnamento con l'addestramento sono maggiori che nei casi precedenti, ma i vantaggi che si possono ottenere da un impiego intelligente sono pure grandi.

Infatti il momento della stesura di un programma costringe il soluto re di un problema a vari passi logici; l'insegnante accorto si varrà di queste occasioni per far riflettere gli allievi sulle operazioni mentali che conducono a ricercare una strategia risolutiva di un problema, ad ana lizzare le procedure logiche che permettono il calcolo concreto dei risul tati numerici, a valutare - ancora una volta - il significato e la porta ta dei risultati in relazione ai problemi concreti.

Non è neppure esclusa la possibilità di adottare delle strategie nuo ve di calcolo delle soluzioni, strategie che non sono applicabili a mano perchè richiederebbero dei calcoli troppo numerosi o troppo gravosi, ma che sono pure concettualmente possibili e che sono realizzabili con le macchinette programmabili.

Così, per le equazioni numeriche, si possono anche considerare non più tanto importanti le equazioni di secondo grado e le relative caterve di esercizi sulla applicazione delle formule risolutive. Si possono esco gitare varie procedure per la soluzione di equazioni numeriche di grado anche superiore al secondo, e quindi si può ampliare di molto il ventaglio degli esercizi e degli argomenti della fisica, della economia, della tec nica e così via, che possono servire per costruire degli eserc izi interes santi e stimolanti.

Ma occorre sempre che l'insegnante impieghi il tempo e la fatica risparmiati per insistere sulla discussione preventiva dei problemi, senza affidare subito alla macchina la ricerca delle radici o in generale delle soluzioni, senza fare una analisi preventiva dei problemi, analisi che in vece dovrebbe essere sempre fatta prima di interrogare il calcolatore per la risposta.

In altre parole, deve essere l'intelligenza che ricerca la risposta e che chiede al calcolatore soltanto le informazioni materiali, non viceversa l'intelligenza che richiede al calcolatore un responso inappellabile prima della analisi logica di un problema.

I programmi che presenteremo nei capitoli seguenti riguardano anzitutto i calcoli con numeri interi, poi vari problemi che conducono a procedimenti di approssimazione di numeri reali.

## VII - Calcoli con numeri interi

### 1. - Ricupero di informazioni

Un primo problema che si presenta agli utenti di macchine elettroniche è quello di recuperare delle informazioni che la macchina non fornisce, a causa delle sue dimensioni.

Per maggiore chiarezza della esposizione che segue, richiamiamo alcune convenzioni per la rappresentazione dei numeri interi e razionali.

Indicheremo con le lettere minuscole dell'alfabeto latino, distinte tra loro da un indice in basso ( $a_0, a_1, a_2, \dots$ ), delle cifre di cui ci serviamo abitualmente per rappresentare i numeri: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; inoltre, seguendo G. Peano e la sua scuola, spesso indicheremo con il simbolo  $X$  la base della nostra numerazione abituale, cioè il numero 10. Ciò permette di rappresentare un intero  $N$  come un polinomio nella  $X$  nella forma, che è spesso utile,

$$(1) \quad N = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

Porremo poi anche:

$$(2) \quad Y = X^3 = 1000.$$

Per semplicità supporremo di disporre di una macchinetta che ha un visore (quello che alcuni chiamano "display") su cui possono comparire 8 cifre; casi diversi si possono trattare con pochissime ed ovvie modificazioni di ciò che diremo.

In questa ipotesi, per quanto riguarda la rappresentazione dei numeri che vengono introdotti nella macchinetta, oppure sono i risultati di operazioni che questa esegue, cioè per quanto riguarda le informazioni che la macchinetta stessa ci può fornire, si possono presentare i seguenti casi:

- i) il numero da rappresentare è intero e minore di  $X^8$ , cioè è rappresentato, mediante le ordinarie convenzioni, con 8 cifre al massimo; allora la rappresentazione dà la informazione completa del valore esatto del numero considerato;
- ii) il numero da rappresentare è intero ma non minore di  $X^8$ ; allora, nella maggior parte delle macchinette, viene utilizzata la cosiddetta rappre

sentazione esponenziale; in altre parole, compare, a sinistra del visore un numero decimale, con 4 cifre al massimo dopo il punto; nella parte a destra del visore compare un intero (con non più di 2 cifre) che indica l'esponente della potenza del 10 per cui deve essere moltiplicato il numero che compare a sinistra per ottenere una valutazione (ovviamente approssimata) del numero da considerare.

Per esempio: se cerchiamo con la nostra macchinetta il numero dato da

$$(3) \quad A = 9875462 \times 3221458$$

si ottiene sul visore:

3.1813 nella parte sinistra e  
13        nella parte destra.

Ciò significa che la macchinetta non ci dà una informazione completa sul numero A, ma dà soltanto il numero:

$$(4) \quad A' = 3.1813 \times 10^{13}$$

come valore - ovviamente approssimato - di A.

III) Il numero da rappresentare è razionale; allora la macchinetta lo rappresenta in forma decimale. Ciò implica che se le cifre della rappresentazione sono in numero maggiore della capacità del visore, la macchinetta presenta ovviamente solo quelle che corrispondono ai posti di cui dispone. Tuttavia, se il numero è molto piccolo, allora la macchinetta lo rappresenta in forma esponenziale; cioè compare nei primi 5 posti a sinistra un numero decimale con una cifra intera, e nei due ultimi posti a destra compare un intero, a cui è premesso il segno meno, che rappresenta l'esponente della potenza (negativa) del 10 per cui va moltiplicato il numero di sinistra per avere un valore (ovviamente approssimato) del numero rappresentato.

Per esempio: se cerchiamo con la nostra macchinetta la rappresentazione del numero razionale B definito da:

$$(5) \quad B = 1/9875462$$

si ottiene sul visore:

1.0126 a sinistra e  
 - 07 nella parte destra.

Ciò significa che la macchinetta ci dà per il numero B cercato il seguente valore (ovviamente approssimato)

$$(6) \quad B' = 1.0126 \cdot X^{-7}.$$

Le osservazioni precedenti ci indicano la strada che porta a recuperare le informazioni che la macchina non ci dà a proposito delle operazioni con numeri molto grandi che abbiamo indicato.

Invero quando si tratta, per esempio, del numero A, indicato nella formula (3), basta rappresentare i due fattori come dei polinomi in Y, nella forma seguente:

$$(7) \quad \begin{cases} 9875462 = 9 Y^2 + 875 Y + 462 \\ 3221458 = 3 Y^2 + 221 Y + 458. \end{cases}$$

Basterà ora eseguire il prodotto dei due polinomi, aiutandosi con la macchinetta per calcolare di volta in volta i prodotti dei coefficienti aventi tre cifre o meno. Ovviamente, a seconda delle caratteristiche delle varie macchinette di cui si può disporre, l'operazione può essere facilitata, evitando di impostare ogni volta entrambi i fattori dei 9 prodotti che si debbono calcolare.

L'operazione potrebbe essere eseguita per esempio nel modo mostrato dalla tabella seguente:

$Y^4$	$Y^3$	$Y^2$	$Y$	$Y^0$
27				
1	989			
2	623			
	193	379		
	4	122		
	1	386		
		102	102	
		600	730	
			211	
				396
31	813	386	863	396

Come si vede, la determinazione del numero A, senza alcuna perdita di informazione, è stata ricondotta al calcolo di cinque facili somme.

## 2. - Funzioni monoargomentali a valori interi

Dedicheremo questo paragrafo alla presentazione di alcuni programmi per il calcolo di funzioni a valori interi di numeri interi. Queste funzioni non sono sempre utilizzate nella didattica, forse perchè il loro calcolo richiede computi spesso lunghi. Esse costituiscono quindi un primo esempio di possibilità di utilizzazione delle macchine (anche piccole) nella didattica.

Indicheremo i vari sottoparagrafi con numeri progressivi dopo il punto decimale che segue la cifra 2.

### 2.1. - Calcolo del fattoriale di un intero N

a) Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10).

```
99 :REM:FATT1 CALCOLA N!  
100 :INPUT"N=";N  
105 :A=1  
110 :B=1  
115 :IF B>N GOTO135  
120 :A=A*B  
125 :B=B+1  
130 :GOTO115  
135 :PRINTN  
140 :PRINTA  
145 :END
```

Il programma FATT1 calcola il fattoriale N! di un intero N. Si tratta di uno dei più semplici programmi riguardanti funzioni intere monoargomentali.

Si incontrano tuttavia i momenti elementari della programmazione: la opportunità di impiegare due memorie: la A e la B; il che traduce in forma esplicita l'operazione quasi automatica che eseguiamo spesso scrivendo il risultato di una operazione, per utilizzarlo nel calcolo successivo.

Appaiono anche gli aspetti convenzionali della scrittura BASIC (120,125), la operazione di confronto (115), che costituisce il procedimento principale di queste macchine ed il fondamento della loro possibilità; la ripetizione delle operazioni (130) fino a che non si raggiunge il risultato desiderato, che viene presentato, insieme con il suo argomento (135, 140).

b) Programma per CASIO FX-602 P

Può essere interessante ed istruttivo costruire il programma per il calcolo della stessa funzione  $N!$  con altro linguaggio e per un'altra macchina.

Il confronto mira a mettere in evidenza il fatto che, pur nella differenza dei modi di esprimersi, i nodi logici del calcolo della funzione rimangono sempre gli stessi.

Accanto ad ogni commento abbiamo scritto i numeri delle istruzioni in BASIC che figurano nel programma precedente.

PO MAC HLT Min 03 1 Min 01 Min 02

La istruzione MAC libera tutte le memorie. La istruzione HLT fa una pausa, prima della scrittura del numero  $N$ , che viene introdotto nella memoria 03. Le costanti iniziali, di valore 1, vengono introdotte in 01 e 02 (100,105,110).

LBL 0 (MR 00- MR 03)  $x \geq 0$  GOTO 1

confronto tra il valore di  $N$  introdotto in 03 ed il valore del contatore 00, che viene dato da 00, con la istruzione ISZ (115,125).

(MR 01 MR 02) Min 01 (120)

calcolo dei valori successivi della funzione, per il fattore crescente di una unità alla volta, secondo la istruzione sequente.

1 M+ 02 ISZ GOTO 0

aumenta di una unità il fattore 02 della formula precedente, aumenta di una unità il contatore 00 e rimanda al principio del calcolo, salvo il confronto analogo alla istruzione 115.

LBL 1 MR 01 HLT.

Visualizza il risultato, quando il confronto dice che il numero dei cicli è uguale al numero  $N$  stabilito all'inizio.

2.2. - Ricerca del minimo divisore di un intero  $A$

Il programma fa passare metodicamente tutti gli interi minori di  $\sqrt{A}$  a partire da 2 in su. Se si supera  $\sqrt{A}$  viene visualizzata la scritta "Primo". Altrimenti viene visualizzato il minimo intero  $N$  tale che la divisione di  $A$  per  $N$  dia resto zero.

Esempi: 1987, 9876543 sono primi.

a) Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10).

```
99 :REM:DIV1 MINIMO DIVISORE DI A
100 :INPUT"A=";A
105 :M=A
110 :B=SQR(A)
120 :N=2
130 :IF N>B GOTO200
140 :C=A/N
141 :D=INT(D)
150 :R=A-D*N
160 :IF R=0 GOTO190
170 :N=N+1
180 :GOTO130
190 :PRINTM,N
191 :STOP
200 :PRINTM,"PRIMO"
210 :END
```

Il programma precedente risulta abbastanza lento, non appena il numero A sia abbastanza grande. La durata può essere diminuita quando si imponga al programma di esplorare non tutti i numeri interi minori di  $\sqrt{A}$ , ma soltanto una parte di essi. Si osserva infatti che il divisore che si cerca è primo e che ogni primo è della forma:

$$(1) \quad R = 6N \pm 1$$

Infatti R, diviso per 6 non può dare resto 2, né 3, né 4.

Si suppone che sul numero A siano già stati provati i criteri elementari di divisibilità per 2, 3, 5; quindi il programma parte da 7 in su. Le istruzioni 125,130,140 fanno percorrere ad N tutti gli interi crescenti da 3 in su; ma Q cresce di una unità ad ogni due unità di N, e la 140 dà appunto tutti gli interi della forma (1), da 7 in su.

La 150 ferma la procedura se R ha superato  $\sqrt{A}$ , come è noto. La 160 calcola il quoziente tra A ed R; 170 ne prende la parte intera, 180 ne calcola la mantissa, 190, 210 fanno ripetere la procedura se la mantissa non è nulla, cioè se la divisione non è esatta, aumentando di una unità l'indice N. 200 Visualizza il divisore trovato, 230 visualizza la scritta "PRIMO" se non è stato trovato alcun divisore.

b) Programma per SHARP 1245 PC

```
100: INPUT "A=";A
105: B = √A
110 : N = 3
125 : P = N/2
130 : Q = INT P
140 : R = 5xQ +(-1)^(N+1)
150: IF R>B GOTO 230
160 : S = A/R
170:T = INT S
180: U = S-T
190: IF U>0 GOTO 210
200: PRINT R
210: N = N+1
220: GOTO 125
230: PRINT " PRIMO".
```

2.3. - Fenomeno aritmetico

Sia  $N$  un intero naturale maggiore di 1. Si costruisca il numero  $N^{\sim}$  con le seguenti regole:

- a) se  $N$  è pari, sia  $N^{\sim} = N/2$
- b) se  $N$  è dispari, sia  $N^{\sim} = 3N+1$ .

Si è sempre verificato, in tutti i numerosissimi casi sui quali si è sperimentato, che il procedimento termina ad 1 dopo un numero finito  $S$  di passi, avendosi ovviamente  $S = S(N)$ . Ma sulla funzione  $S(N)$  non si sa ancora nulla, salvo le proprietà ovvie, per esempio:

$$S(2N) = S(N) + 1.$$

Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10) per calcolare  $S(N)$ .

```
99 :REM FEN1 ; S(N)
100 : INPUT"N=";N
120 :S=1
130 :F=N/2
140 :IFP=1 GOTO 250
150 :Q=INT(P)
160 :R=N-Q*2
170 :IF R=0 GOTO220'VERIFICA FAKITA
180 :N=N*3
190 :N=N+1
200 :S=S+1
210 :GOTO 130
220 :S=S+1
230 :N=P
240 :GOTO 130
250 :PRINT S
260 :PRINT"END"
261 :END
```

#### 2.4. - Funzione $\phi(N)$ di Eulero-Gauss

La funzione  $\phi(N)$  di Eulero dà il numero dei numeri (interi naturali) che sono minori dell'intero naturale  $N$  e che hanno con  $N$  MCD uguale ad 1 (quindi compreso 1).

La formula che dà il valore di  $\phi(N)$ , quando si conosca la decomposizione di  $N$  in fattori primi è la seguente: se è

$$(1) \quad N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$$

allora è:

$$(2) \quad \phi(N) = N(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_r)$$

Per giungere alla (2) si può seguire la strada seguente:

a) Anzitutto se  $N$  è un numero primo  $p$  tutti i numeri minori di  $N$  sono primi con lui. Quindi è:

$$(3) \quad \phi(p) = p - 1$$

b) Se  $N$  è la potenza di un primo:

$$(4) \quad N = p^a ; \quad a \geq 2$$

i divisori di  $N$  sono soltanto le potenze di  $p$  con esponente minore di  $a$ : tutti gli altri numeri minori di  $N$  sono ancora primi con lui. Quindi il numero  $\phi(N)$  è dato in questo caso da:

$$(5) \quad \phi(p^a) = p^a - p^{a-1} = N(1 - 1/p).$$

c) Supponiamo ora che  $N$  possa essere espresso come prodotto di due fattori  $m, n$  primi tra loro:

$$(6) \quad N = m n \quad \text{MCD}(m, n) = 1.$$

Allora si ha:

$$(7) \quad \phi(N) = \phi(mn) = \phi(m) \phi(n).$$

Per dimostrare la validità della (7) si osservi che gli  $N=mn$  numeri da 1 ad  $N$  possono essere divisi in quattro classi:

i) quelli che hanno qualche fattore in comune con  $m$  ed anche con  $n$ ; indicato con  $A$  il loro numero, si ha:

$$(8) \quad A = \{m - \phi(m)\} \{n - \phi(n)\} ;$$

ii) quelli che hanno qualche fattore in comune con  $m$  ma non con  $n$ ; indicato il loro numero con  $B$ , si ha:

$$(9) \quad B = \phi(n) \cdot \{m - \phi(m)\} ;$$

iii) quelli che hanno qualche fattore in comune con  $n$  ma non con  $m$ ; indicato con  $C$  il loro numero, si ha:

$$(10) \quad C = \phi(m) \cdot \{n - \phi(n)\} ;$$

iii)j) quelli che non hanno alcun fattore in comune, nè con  $m$  nè con  $n$ ; indichiamo con  $X$  il loro numero.

Si deve ovviamente avere:

$$(11) \quad N = mn = A + B + C + X$$

eseguendo i calcoli, si ottiene la (7).

Esempio: sia  $N = 100 = 4 \times 25$ .

Si ha:  $\phi(4) = 2$  ;  $\phi(25) = 20$ .

Esistono  $(4-2) \times (25-20) = 10$  numeri che non sono primi nè con 4 nè con 25: sono i 10 multipli di 10; ci sono  $2 \times 20 = 40$  numeri primi con 2 ma non con 5: sono i 50 numeri pari, da cui sono stati detratti i multipli di 10, già contati; ci sono  $5 \times 2 = 10$  numeri primi con 5 ma non con 2. In totale si hanno  $40 + 10 + 10$  numeri che non sono primi con 100. I rimanenti  $40 = 20 \times 20$  sono primi con 100.

Dalla (7), tenendo conto della (1) e della (5), si giunge alla (2).

Tuttavia l'impiego della (2) per il calcolo del valore della  $\phi(N)$  non è molto comodo. Occorre quindi escogitare qualche maniera indiretta per determinare il valore della funzione. Una strada che si potrebbe percorrere

sarebbe quella di esplorare ogni numero intero minore di  $N$ , e contare quelli che hanno con  $N$  un MCD uguale ad 1. Questa strada conduce tuttavia a calcoli abbastanza lunghi e deve utilizzare come subroutine un programma che calcola il MCD di due numeri (cfr. 3.2.).

Conviene quindi seguire la strada seguente: si esplorano i numeri minori di  $N$ , da 2 in su. Quando si incontra un divisore  $Z$ , si calcola:

$$(12) \quad \tilde{N} = N(1 - 1/Z) ;$$

si ricomincia poi l'analisi sul numero  $\tilde{N}$ , ricercando tuttavia i fattori primi "nuovi", cioè maggiori di quello trovato, ed eseguendo la operazione (12); esauriti tutti i divisori primi di  $N$  il valore che si ottiene dalle successive operazioni è quello di  $\phi(N)$ , secondo la (2).

a) Programma in linguaggio BASIC (Sharp - PC 1245).

```
100: INPUT "N=";N
```

Introduzione dell'argomento.

```
110: A=N , B=N
```

Il numero  $N$  viene introdotto nelle memorie  $A$  e  $B$  per gli scopi che seguiranno.

```
112: D=0
```

Il valore nella memoria  $D$  servirà per il confronto 210.

```
115: C =  $\sqrt{A}$ 
```

Il valore  $C$  serve per il confronto 125, che ferma la esplorazione dei numeri interi minori di  $A$  quando si supera la radice di questo numero; il che risparmia tempo, quando si tratta di analizzare un numero primo grande.

```
120: X=2
```

Inizio della procedura di esplorazione dei numeri minori di  $A$ .

```
125: IF X > C GOTO 190
```

Serve per abbreviare la procedura di esplorazione, come detto sub 115.

```
130: Y=A/X
```

```
140: W=INT(Y)
```

```
150: U=Y-W
```

Queste istruzioni servono per cercare un divisore di  $A$ , attraverso il calcolo del quoziente (130) e del resto (140,150).

```
160: IF U=0 GOTO 200
```

La condizione soddisfatta identifica un divisore di A. Se non è soddisfatta si aumenta il divisore di una unità e si ricomincia.

170: X=X+1

180: GOTO 125

190: X=A

200: Z=X

205: W=A/X

190 viene da 125, e salta l'analisi di tutti gli interi superiori a C. 200 introduce in Z il valore del divisore trovato e 205 calcola il quoziente.

210: IF D-Z=0 GOTO 230.

Verifica se il divisore trovato è "nuovo"; se non lo è, si salta la istruzione successiva, altrimenti la si esegue.

220: B=B (Z-1)/Z

Si libera B del divisore Z e si moltiplica il risultato per (Z-1) (numero dei numeri minori di Z e primi con lui, perchè Z è primo).

230: IF W=1 GOTO 270.

Se il quoziente è 1, ciò significa che si è giunti all'ultimo divisore altrimenti si ricomincia, introducendo il quoziente trovato in A ed il divisore in D per il confronto 210.

240: A=W

250: D=Z

260: GOTO 115

270: Print B

280: END.

b) Programma per CASIO FX-6028

1 - MAC HLT Min 02 Min 04

Si puliscono tutte le memorie. Si introduce il numero da analizzare (intero naturale) N in 02 e 04.

2 - LBL1 2 Min 01

Si introduce 2 in 01, per iniziare il procedimento di esplorazione dei divisori.

3 - LBL 0 (MR 02 / MR01) Min 03

Si esplorano i numeri minori di N a partire da 2 e si verifica se il numero che si ottiene è un divisore, con la istruzione seguente:

4 - (MR 03 FRAC) X=0 GOTO 2

Se il numero di 01 è un divisore, si passa alla istruzione 6. Se no si aumenta di una unità il divisore e si ritenta, con la istruzione seguente:

5 - 1 M+01 GOTO 0

6 - LBL 2 MR01 Min05

Si introduce il divisore trovato in 05, in attesa di usarlo. Si verifica se il divisore trovato è "nuovo" con la istruzione seguente:

7 - (MR 06 - MR 05)  $x \geq 0$  GOTO 4

In 06 è lo zero inizialmente, oppure il divisore trovato, introdotto con la istruzione 10. Quindi la 7 istituisce un confronto tra il precedente e quello trovato. Se il divisore che si trova è uguale a quello precedente, si salta la istruzione seguente. Altrimenti la si esegue.

8 - (MR 04x(MR 01 -1) / Mr01) Min 04

Se il divisore D trovato è "nuovo" si opera sul numero N con la operazione di divisione e di moltiplicazione per (D-1); il risultato lo si introduce di nuovo in 04.

9 - LBL 4 (1-MR 03)  $x \geq 0$  GOTO 3

Si verifica che il quoziente trovato sia maggiore di 1 oppure no. Se è uguale ad 1 il procedimento finisce con la istruzione 11, perchè si è esaurita l'analisi. Altrimenti si prosegue, introducendo il quoziente trovato in 02, introducendo il divisore trovato, e già introdotto in 05 con la istr. 6, nella memoria 06, per un nuovo confronto di tipo 7.

E si ricomincia il procedimento, partendo dal quoziente trovato.

10 - MR 03 Min 02 MR 05 Min 06 GOTO 1

11 - LBL 3 MR 04 HLT

Se i controlli 7 e 9 verificano che l'ultimo quoziente è 1, si visualizza il risultato delle varie operazioni 8.

#### OSSERVAZIONE

Il programma può essere migliorato e reso più rapido. Infatti la istr. 3 fa esplorare tutti i numeri minori di quello contenuto in 02; invece basterebbe far passare in rassegna soltanto quelli minori della radice quadrata di quel numero. Il che renderebbe il programma più rapido; infatti quando N sia primo e grande, la rassegna di tutti i numeri minori comporta molto tempo. Per es. per N=1987, la radice quadrata vale meno di 45. Quindi il tempo risparmiato è notevole.

Pertanto conviene utilizzare un'altra memoria e modificare il programma con le istruzioni che seguono. Si richiamano le istruzioni vecchie modi

ificate con lo stesso numero, con asterisco. Quelle non modificate si intendono conservate. Le nuove vengono introdotte con la annotazione "bis".

1~ - MAC HLT Min 02 Min 04 Min 07

Ho bisogno di un'altra memoria in cui introdurre il dato N, per il confronto che verrà fatto con la istr. 3~.

2 - Invariata

3~ - LBL 0 (MR 01 - MR 07 /) - 1)  $x \geq 0$  GOTO 5

Qui si fa appunto il confronto tra i numeri che si costruiscono via via in MR 01 e la radice del dato, o del quoziente che si costruisce con la istr. seguente.

3 bis - LBL 6 (MR 02 / MR 01) Min 03

Istruzioni da 4 a 9 compresa: invariate. La 10 diventa:

10~ - MR 03 Min 02 MR 05 Min 06 MR 03 Min 07

Infatti il quoziente ottenuto, che è in 03 deve sottostare alla analisi che ricomincia, come da nuova istruzione 12 che vedremo sotto.

11 - Invariata

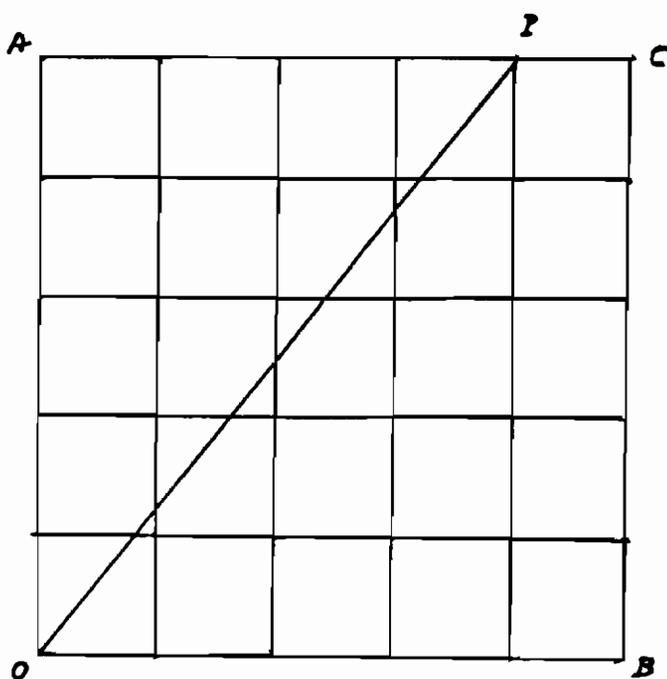
12 - LBL 5 MR 07 Min 01 GOTO 6

Questa istruzione ha lo scopo di mettere in 01 (cioè nella memoria che contiene il divisore esatto) il numero che è contenuto in 07, se nella esplorazione si è superata la radice di 07. Altrimenti se in 07 è un numero primo occorrerebbe lasciare che l'esplorazione arrivi fino a lui.

### c) Interpretazione geometrica della funzione $\phi(N)$

Si consideri nel "geopiano" un quadrato di vertici O, A, C, B, tale che si abbia  $OA = OB = AC = BC = N$ , si può formulare il problema di trovare sul lato AC un punto P tale che la retta OP non passi per alcun punto del geopiano interno al quadrato.

E' facile dimostrare che il numero dei punti P sul lato AC è dato da  $\phi(N)$ .



d) Tavola della funzione  $\phi(M)$  di Eulero da 3 a 100.

I valori di  $\phi(M)$  sono inseriti nelle caselle quadrate; ogni casella corrisponde ad un numero  $M$  la cui rappresentazione decimale è costituita da due cifre: quella delle decine corrisponde alla riga della casella, quella delle unità corrisponde alla colonna della casella.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0				2	2	4	2	6	4	6
1	1	10	4	12	6	8	8	16	6	18
2	8	12	10	22	8	20	12	12	12	28
3	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
4	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
5	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
6	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
7	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
8	32	54	40	82	24	64	42	56	40	22
9	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60
10	40									

### 2.5. - Gaussiano di un intero N nella base 10

Si chiama "gaussiano" di un intero N nella base 10 il minimo intero r tale che valga la relazione:

$$(1) \quad 10^r \equiv 1 \pmod{N}$$

E' noto che il numero r, quando N sia primo, dà il numero delle cifre del periodo della rappresentazione decimale del numero  $1/N$ .

Ricordiamo qui di seguito brevemente la dimostrazione di questo fatto.

Indicato con A un numero naturale, rappresentato nella forma abituale con un allineamento di r cifre, si sa che il numero decimale periodico:

$$(2) \quad 0.(A) \quad (\text{periodo})$$

ha la frazione generatrice:

$$(3) \quad A / (10^x - 1);$$

la stessa cosa potrebbe essere espressa in altro modo dicendo che il numero decimale periodico (2) è la rappresentazione decimale del razionale (3). Così, per esempio 79/99 è rappresentato in forma decimale da 0.(79). Questa regola è insegnata nei libri di Aritmetica pratica senza spiegazione; invero questa implicherebbe la determinazione della somma della serie geometrica:

$$A(10^{-x} + 10^{-2x} + 10^{-3x} + \dots) = A \cdot 10^{-x} / (1 - 10^{-x})$$

determinazione che non fa parte dei programmi attuali di Matematica elementare.

Si consideri ora in particolare un numero primo, che indicheremo con  $p$ , e che supporremo rappresentato in forma decimale con un allineamento di  $(n+1)$  cifre. Si avrà quindi:

$$(4) \quad 10^n < p < 10^{n+1}$$

ossia:

$$(5) \quad 10^{-1} < 10^n/p < 1$$

Il razionale  $10^n/p$  può essere rappresentato in forma decimale periodica del tipo (2); indicando con  $r$  il numero delle cifre del periodo, si avrebbe quindi:

$$(6) \quad 10^n/p = A/(10^x - 1)$$

ossia:

$$(7) \quad 10^n (10^x - 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Escludiamo ora che si abbia  $p=2$  oppure  $p=5$ , il che darebbe luogo ad un numero decimale con un numero finito di cifre dopo il punto decimale, cioè non periodico. Dalla (7) si trae:

$$(8) \quad 10^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

A seguito di un classico teorema di Fermat, la (8) ha certamente la soluzione:

$$(9) \quad r = p - 1$$

ma può avere come soluzione un intero che sia divisore di  $(p-1)$ ; per esempio per  $p=13$  si ha:

$$10^6 \approx 13.76923 + 1$$

Pertanto la determinazione dell'intero  $r$ , che sia il minimo che soddisfa alla (1) deve essere fatta con un calcolo diretto. Si tratta di un caso molto istruttivo di utilizzazione delle macchine calcolatrici.

a) Programma in linguaggio BASIC (Olivetto M10)

Il programma calcola i resti delle potenze del 10 rispetto ad  $N$ . Ottenuto un resto (140) verifica se è uguale ad 1 (150); se si visualizza il numero di operazioni, se no moltiplica per 10 e ricomincia (160-170). Ottenuto il resto 1 visualizza il numero di cicli.

```

99:REM.GAU1=GAUSSIANO DI N
100:INPUT"N=";N
110:A=N
120:B=10
125:F=1
130:C=B/A
135:D=INT(C)
140:E=B-A*D
150:IF E=1GOTO180
160:B=E*10
165:F=F+1
170:GOTO 130
180:PRINT"GAUSS("N")=";F
185:END

```

b) Programma per CASIO FX-602P

Il programma analizza successivamente le potenze di 10 e ne calcola i resti rispetto al modulo N, fermandosi quando ha raggiunto il numero r che soddisfa alla (1). Ma per evitare il calcolo di numeri troppo grandi, calcola il resto dopo ogni moltiplicazione.

1 - P3 MAC HLT Min 01 10 Min 02

Il numero N viene introdotto in 01 e il 10 in 02.

2 - LBL 0 (MR 02/MR 01) Min 03 (MR 03 INT) Min 04

Calcola la parte intera del quoziente tra la potenza di 10 ed il numero N. Se tale parte intera è maggiore di zero, si prosegue andando alla istr. LBL 1 altrimenti si rialza la potenza e si ricomincia, contando i cicli:

3 - (MR 04 - 1)  $\times \geq 0$  GOTO 1

4 - (MR 02  $\times$  10) Min 02 ISZ GOTO 0

5 - LBL 1 (MR 02 - MR 01  $\times$  MR 04) Min 05

Calcolo del resto, quando esiste.

6 - (1 - MR 05)  $\times = 0$  GOTO 2

Termina il procedimento quando il resto vale 1; altrimenti si moltiplica il resto per 10 e si ricomincia, contando i cicli.

7 - (MR 05  $\times$  10) Min 02 ISZ GOTO 0

8 - LBL 2 (1 - MR00) HLT

Il computo dei cicli dà una unità in meno dell'esponente di 10 che verifica la (1); donde l'addendo 1.

3. - Funzioni pluriargomentali a valori interi

3.1. - Massimo comun divisore di due interi naturali

Il programma calcola il massimo comun divisore di due naturali M ed N con l'algoritmo di Euclide delle divisioni successive.

La istruzione 140 calcola il resto della divisione tra M ed N; la 150 verifica se il resto è zero, ossia se la divisione è esatta: se si, si visualizza il risultato; se no si ricomincia (istr. 160,170).

Programma in linguaggio BASIC

```
99:REM . MASSIMO COMUN DIVISORE
100:INPUT "M=";M
110:INPUT "N=";N
120:A = M/N
130:B = INT(A)
140:C= M -B*N
150:IF C=0 GOTO 190
160:M=N
170:N=C
180:GOTO 120
190:PRINT N
200:END
```

3.2. - Funzione  $\phi(N)$  di Eulero-Gauss

a) Programma in linguaggio BASIC

Il programma calcola il valore della funzione  $\phi(N)$  di Eulero-Gauss direttamente, secondo la definizione data in 2.4.: si esplorano metodicamente tutti gli interi minori di N a partire da 1 in su, e di ciascuno si calcola il MCD con N (Subroutine 300-380); se questo MCD vale 1 se ne tiene conto (150), altrimenti si passa all'intero successivo. Programma lento, anche a causa della utilizzazione della Subroutine ad ogni passo.

```
99 :REM.FI(N). FUNZIONE DI EULERO
100 :INPUT "N=";N
105 :Z=N
110 :F=1
115 :B=1
120 :IF B>=2 GOTO 175
123 :N=Z
125 :A=B
130 :GOSUB 300
140 :IF E>1 GOTO 160
150 :F=F+1
160 :B=B+1
170 :GOTO 120
175 :PRINT F-1
180 :END
300 :P=N/A
310 : Q= INT(P)
320 :R=N-A*Q
330 :IF R=0 GOTO 360
340 :N=A
345 :A=R
350 :GOTO300
360 :E=A
380 :RETURN
```

b) Programma per CASIO FX 602P

1 - P3 MAC HLT Min 05

Il valore dell'intero N considerato è introdotto in 05.

2 - 1 Min 06

Si parte con il valore  $a = 1$ , che viene introdotto in 06.

3 - LBL 3 (MR 06 - MR 05)  $x \geq 0$  GOTO 2

Istruzione che determina la fine del programma quando  $a$  supera N.

4 - MR 05 Min 01 MR 06 Min 02 GSB P2

Introduce i dati nelle memorie 01 e 02, che sono le memorie di partenza della Subroutine P2 che calcola il MCD.

5 - (1 - MR 02)  $x \geq 0$  GOTO 4

Verifica se il MCD vale 1, cioè se  $a$  ed N sono primi tra loro.

Se non è così, si aumenta  $a$  di una unità e si ritorna alla istr. 3:

6 - 1 M+06 GOTO 2

7 - LBL 4 1 M+06 ISZ GOTO 3

Se il MCD vale 1, si conta l'evento (ISZ), ed ancora si aumenta  $a$  di una unità 06 e si ricomincia.

8 - LBL 2 MR 002 HLT

Alla fine del procedimento, determinata dalla istr. 3, si contano i cicli per cui  $MCD(a, N) = 1$  e si ottiene il valore della funzione.

Subroutine per il calcolo di  $MCD(a, N)$

9 - P2 MAC HLT Min 01 HLT Min 02

Introduzione dei due interi nelle memorie 01 e 02. ATTENZIONE!! Quando P2 serve come subroutine di P3, la istr. 9 va cancellata, perchè all'uopo serve la 4.

10 - LBL 0 (MR 01 / MR 02) Min 03

11 - MR 03 FRAC  $x = 0$  GOTO 1

Verifica se la divisione è esatta.

12 - (MR 01 - (MR 02 \* (MR 03 INT))) Min 04

Calcola il resto della divisione, quando questa non è esatta.

13 - MR 02 Min 01 MR 04 Min 02 GOTO 0

Il divisore e il resto vanno al posto del dividendo e del divisore, e si ricomincia.

14 - LBL 1 MR 02 HLT

Se la divisione 10 è esatta, è stato trovato il MCD.

N.B. Se P2 serve come SBR di P3, anche la istr. HLT va cancellata.

### 3.3. - Coefficienti binomiali

Il calcolo dei coefficienti binomiali dà luogo ad una procedura che è la immediata applicazione del programma 2.1, che calcola il fattoriale  $N!$  di un intero  $N$ . Il programma accluso calcola il coefficiente binomiale:

$$\binom{K_1 + K_2}{K_1} = \binom{K_1 + K_2}{K_2}$$

secondo la nota formula:

$$(1) \quad \binom{K_1 + K_2}{K_1} = (K_1 + K_2)! / (K_1!) * (K_2!)$$

Il programma utilizza il 2.1 come Subroutine 905-940.

Questa Subroutine riproduce quasi completamente il programma FATT1; è da osservarsi che la variabile  $A$  è stata trasformata in  $D$ , perchè deve diventare  $A$  soltanto con la istr. 935, che la mette nella forma che può essere utilizzata dal programma completo.

a) Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
199 :REM:CK1K2 CALCOLA(K1+K2)!/K1!*K2!
200 :INPUT"K1=";K1
201 :INPUT"K2=";K2
205 :N=K1
210 :GOSUB905
215 :H1=A
220 :N=K2
225 :GOSUB905
230 :H2=A
235 :N=K1+K2
240 :GOSUB905
245 :H3=A
250 :CK=H3/(H1*H2)
255 :PRINTCK
260 :END
905 :D=1
910 :B=1
915 :IFB>N GOT0935
920 :D=D*B
925 :B=B+1
930 :GOT0915
935 :A=D
940 :RETURN
```

#### OSSERVAZIONE

La utilizzazione della formula (1) che dà il coefficiente binomiale può condurre rapidamente a numeri molto grandi, come  $(K_1 + K_2)!$ , che eccedono la capacità della macchina. Convien quindi utilizzare il programma che segue, che evita il calcolo di numeri grandi.

b) Programma in linguaggio BASIC (Sharp 1245 PC)

```
600 : INPUT "N=";N
610: INPUT "K=";K
615 : A=N; B = N-K
620: N= K+1
625 : Q=N
630:IF N >=A GOTO 670
640: N = N+1
650: Q = Q * N
660: GOTO 630
670: K=1
675: P=K
680: IF K >=B GOTO 720
690: K = K+1
700: P = P * K
710: GOTO 680
720: R = Q/P
730 : PRINT R
740 : END
```

c) Verifica della formula:

$$2^N = \sum_{K=0}^N C(N,K)$$

Infatti il secondo membro è lo sviluppo della potenza del binomio  $(1+1)$  secondo la nota formula del binomio di Newton.

Qui il programma precedente serve come subroutine, partendo da 615. Ovviamente vanno sopresse le istruzioni 730,740 e sostituite con:

```
740: RETURN
```

Programma:

```
750: INPUT "N=", N
760: M = 0
```

Si introduce una nuova variabile M, che sarà l'indice della sommatoria.

765: S=0

Valore iniziale della somma.

770: IF M >= N GOTO 830

Istruzione per il termine del procedimento quando l'indice della sommatoria ha raggiunto il valore massimo.

780: K=M

Si chiama K l'indice della sommatoria per poter utilizzare la subroutine, che lavora con questo indice.

790: GOSB 615

Calcola il coefficiente binomiale corrispondente al valore K.

800: S=S+R

Aggiunge un addendo alla somma S, e precisamente il valore R calcolato dalla Subroutine.

810: M=M+1

Aumenta di una unità l'indice della sommatoria.

820: GOTO 770

Ripete il procedimento.

830: Print 1+S

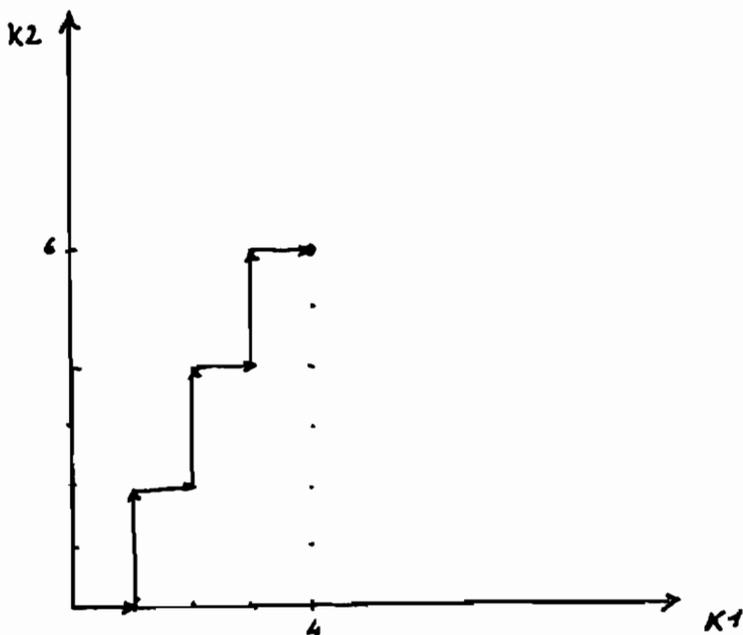
840: END.

#### OSSERVAZIONE

Programma molto lento, come era da attendersi.

#### d) Interpretazione geometrica dei coefficienti binomiali.

Come è noto, il coefficiente binomiale dato dalla (1) può essere pensato come la risposta al problema geometrico seguente: nel geopiano, riferito a coordinate intere  $K_1, K_2$ , contare quanti sono i cammini che portano dall'origine al punto  $(K_1, K_2)$  e sono costituiti da segmenti unitari positivi, paralleli agli assi.



### 3.4. - Funzione di Legendre

Abbiamo chiamato "funzione di Legendre" ed indicato con il simbolo  $L(N,p)$  la funzione che dà l'esponente della massima potenza del numero primo  $p$  che divide  $N!$  (cfr. l'articolo di U. Scarpis "Numeri primi ed analisi indeterminata" in "Questioni riguardanti le Matematiche elementari" di F. Enriques. Parte III - Art. XXIV).

Il valore di tale funzione è dato da:

$$(1) \quad L(N,p) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Int}(N/p^i)$$

a) Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```

99:REM:LEG1=LEGENBRE
100:INPUT"N=";N
105:INPUT"P=";P
106:T=0
110:A=1
120:Q=P^A
130:R=N/Q
140:S=INT(R)
150:T=T+S
160:IF S=0 GOTO 190
170:A=A+1
180:GOTO120
190:PRINT"L("N","P")=";T
200:END

```

b) Programma per CASIO PX 602P

1 - P4 MAC HLT Min 01 HLT Min 02 1 Min 03

Si introducono i numeri N e p (primo) rispettivamente in 01 e 02. In 03 si mette 1, che è il primo esponente da utilizzare.

2 - LBL 0 (MR 02  $x^y$  MR 03) Min 04

Costruzione delle successive potenze di p.

3 - ((MR 01/MR 04) INT) Min 05

Calcolo della parte intera della divisione di N per la potenza di p.

4 - MR 05 M +06

Accumulo dei risultati in 06.

6 - -MR 05  $x \geq 0$  GOTO 1

Valutazione della parte intera del quoziente, per fermare il procedimento quanto tale parte intera è zero.

7 - 1 M+03 GOTO 0

Se l'ipotesi analizzata nella istruzione precedente non vale, calcolo della potenza successiva di p e ripresa del ciclo di operazioni.

8 - LBL 1 MR 06 HLT

Visualizzazione del risultato finale.

### 3.5. - Equazione di analisi indeterminata

Sia da risolvere in numeri interi l'equazione:

$$(1) \quad AX \equiv 1 \pmod{M} \quad (A, M \text{ interi})$$

E' noto che un celebre teorema (di Eulero-Fermat) afferma che si ha:

$$(2) \quad A^{\phi(M)} \equiv 1 \pmod{M}$$

quando A ed M sono primi tra loro; se invece A ed M non sono primi tra loro, la relazione (1) non può sussistere per nessun intero X.

Pertanto, in forza della (2), quando la soluzione esiste, potrebbe essere data dalla formula:

$$(3) \quad X \equiv A^{\phi(M)-1} \pmod{M}$$

Tuttavia la utilizzazione della formula (3) potrebbe essere scomoda; anzitutto perchè essa richiede il calcolo della funzione  $\phi(M)$ , e poi perchè i numeri che danno le potenze di A potrebbero diventare grandi, e superare la capienza della macchina. Conviene quindi calcolare direttamente le potenze successive di A, calcolando ogni volta il resto della divisione per M, fino a che si incontra il resto 1.

a) Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

Le istruzioni fino a 180 calcolano il MCD tra A ed M; se questo è maggiore di 1 i due non sono primi tra loro, ed il programma visualizza "NO ROOT".

Il calcolo delle successive potenze di A e dei resti delle divisioni per M incomincia con la istruzione 200; X è un contatore, che visualizza il numero di cicli fatti e che dà la minima potenza di A che dà resto 1 modulo M (gaussiano di M nella base A. Cfr. 3.2.).

Il programma visualizza alla fine la soluzione della equazione (1) ed il numero di cicli, che è ovviamente un divisore di  $\phi(M)$ .

```

99:REM:AINI=ANALISI INDETERMINATA
100:INPUT"A=";A
110:INPUT"M=";M
115:F=A
116:N=M
120:B=M/A
130:C=INT(B)
140:D=M-A*C
150:IFD=0 GOTO180
160:M=A
161:A=D
170:GOTO 120
180:E=A
190:IF E>1 GOTO 310
200:X=1
205:P=F
210:IF F>N GOTO 240
219:X=X+1
220:F=F#P
230:GOTO 210
240:G=F/N
250:H=INT(G)
260:K=F-N#H
270:IF K=1 GOTO300
280:R=K
281:F=R
290:GOTO 210
300:PRINT R
301:PRINT X
302:STOP
310:PRINT"NO ROOT"
320:END

```

#### OSSERVAZIONE

Risolvere la (1) equivale ovviamente a risolvere il problema di analisi indeterminata di 1° grado, che consiste nel cercare gli interi X,Y tali che si abbia:

$$(4) \quad AX - MY = 1$$

Esempi di coppie di interi che sono reciproci rispetto ad un modulo M.

M	A	X
40	7	23
75	7	43

99	13	61
79	19	25
83	43	56
101	43	47

### 3.6. - Ricerca di terne pitagoriche di numeri naturali

Come è noto, si chiama "pitagorica" una terna di interi A,B,C tali che sia:

$$(1) \quad A^2 + B^2 = C^2$$

La ricerca delle terne pitagoriche di interi è stata oggetto di ricerca che fino dalla più remota antichità. In Diofanto si trovano le espressioni di terne di interi, che si possono tradurre in notazione moderna con le formule:

$$(2) \quad \begin{cases} A = M^2 - N^2 \\ B = 2 M N \\ C = M^2 + N^2 \end{cases} \quad M > N.$$

In particolare, quando si ponga:

$$(3) \quad \begin{cases} M = P + 1 \\ N = P \end{cases}$$

si ottengono le terne del tipo:

$$(4) \quad \begin{cases} A = 2P + 1 \\ B = 2P (P + 1) \\ C = 2P^2 + 2P + 1 \end{cases}$$

che danno le misure (intere) dei cateti e dell'ipotenusa dei triangoli rettangoli tali che un cateto differisca di una unità dall'ipotenusa.

Si può notare tuttavia, che le formule (2) non forniscono tutte le

terne pitagoriche. Infatti, per esempio, la terna (9,12,15) non si può ottenere con la (2).

Infatti non si può avere:

$$(5) \quad 9 = 2 M N$$

e quindi può essere solamente

$$(6) \quad 12 = 2 M N$$

ma deve essere

$$(7) \quad M > N$$

e questo è possibile soltanto con  $M = 3$ ,  $N = 2$  e questi valori danno la terna (5,12,13).

Se quindi non si vuole lasciarsi sfuggire alcuna terna pitagorica, conviene fare una ricerca diretta. Ciò può essere fatto con il seguente programma, che ricerca tutte le terne di interi (A,B,R) tali che valga la:

$$(8) \quad A^2 + B^2 = R^2$$

imponendo come limite superiore il valore di:

$$(9) \quad A + B = N$$

Programma in linguaggio BASIC (Sharp PC 1245)

100: Input "N="; N

Impone il limite superiore della somma A+B.

120: C=3

Valore di partenza della somma A+B.

130: IF C > N GOTO 270

Istruzione per la fine del procedimento quanto si è superato il limite N.

140: A=1

Inizio del procedimento di ricerca.

150: IF A > C/2 GOTO 230

Evita le ripetizioni, cioè lo scambio dei valori trovato A e B.

160: B=C-A

Calcola la differenza tra il valore di B e quello della somma imposta A+B.

170: S=A<sup>2</sup>+B<sup>2</sup>

Calcola la somma dei quadrati.

180: R = √S

Calcola la radice quadrata della somma S.

190: V=R-INT(R)

Calcola la mantissa di R. Se questa è zero, allora R è un quadrato perfetto e si passa alla istr. 250, come da istruzione seguente:

200: IF V=0 GOTO 250

210: A=A+1

Se la mantissa non è zero, allora R non è un quadrato perfetto e si ricomincia con un valore di A aumentato di una unità.

220: GOTO 150

Esaurita la ricerca con un dato C, come da istr. 150, si aumenta C e si ricomincia.

230: C=C+1

240: GOTO 159

Quando si è trovato un quadrato perfetto per R si visualizzano i risultati.

250: PRINT A

255: PRINT B

260: PRINT R

Si ricomincia la esplorazione.

265: GOTO 210

Quando la somma A+B ha superato il limite N prescritto si visualizza la fine del procedimento.

270: Print "END"

280: END.

Terne pitagoriche di interi  $A^2 + B^2 = C^2$ , ordinate secondo la somma  $S = A+B$  del cateti. Il segno + indica una terna i cui tre numeri non hanno alcun fattore comune; il segno ~ indica che tra l'ipotenusa ed uno dei cateti vi è differenza di una unità.

S	A	B	C		S	A	B	C	
7	3	4	5	+~	77	33	44	55	
14	6	8	10		79	16	63	65	+
17	5	12	13	+~	82	40	42	58	
21	9	12	15		84	36	48	60	
23	8	15	17	+	85	25	60	65	
28	12	16	20		89	33	56	65	+
31	7	24	25	+~	91	39	52	65	
34	10	24	26		92	32	60	68	
35	15	20	25		93	21	72	75	
41	20	21	29	+	94	24	70	74	
42	18	24	30		97	13	84	85	+~
46	16	30	34		98	18	80	82	
46	12	35	37	+	98	42	56	70	
49	9	40	41	+~					
49	21	28	35						
51	15	36	39						
56	24	32	40						
60	14	48	50						
63	27	36	45						
68	20	48	52						
69	24	45	51						
70	30	40	50						
71	11	60	61	+~					
73	28	45	53	+					

### 3.7. - Cambiamento di base per la rappresentazione degli interi

Abbiamo già accennato al problema del cambiamento di base (cap. VI, par. 1.) e sulle opportunità che si possono trarre da questa operazione per riflettere sulle proprietà formali delle operazioni e sulle convenzioni che si usano per la rappresentazione degli interi e delle operazioni su di essi. Siamo anche ritornati sull'argomento nel par. 1 di questo capitolo; la formula (1) di tale paragrafo mostra che le cifre della rappresentazione di un intero  $N$  in una base  $X$  si possono calcolare a partire dalla prima a destra nel modo seguente: la prima cifra è ovviamente il resto della divisione  $N$  per  $B$ . La seconda cifra si ottiene dividendo il quoziente per la base  $X$  e ricominciando sul nuovo numero la operazione. Con le cifre trovate via via si può ricostruire la rappresentazione del numero  $N$  nella nuova base, operando sulle cifre come se fossero cifre della rappresenta-

zione abituale in base 10. Il ritorno dalla base X alla base 10 si fa con operazioni inverse, a partire dalle cifre della rappresentazione in base B. La valutazione di N si ottiene ovviamente calcolando il valore del polinomio (1) del par. 1. ponendo B al posto di X.

Le due operazioni, di passaggio dalla base 10 abituale alla base B e di ritorno dalla base B alla base 10 sono programmate nei programmi BAS1 e BAS2 rispettivamente.

In BAS1 le istruzioni 110-130 e poi quelle 140-152 calcolano le varie cifre della rappresentazione in base B. La 120 fa ultimare l'operazione quando si è ottenuta l'ultima cifra; la 135 ricostruisce la rappresentazione di N nella nuova base, secondo le osservazioni che abbiamo fatto sopra.

Analoghe considerazioni si possono ripetere per il programma BAS2.

Per semplicità i programmi sono stati costruiti per una base B minore di 10. Infatti la utilizzazione di una base maggiore di 10 richiederebbe la introduzione di nuovi simboli per i numeri superiori a 9; quindi la operazione di cambiamento di base, anche se concettualmente non diversa da quella considerata nei programmi allegati, porterebbe materialmente a complicazioni di rappresentazione.

a) BAS1, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99 :REM: BAS1=CAMBIAMENTO DI BASE
100 :INPUT "N=";N'DATO
105 :INPUT "B=";B'NUOVA BASE
110 :Z=0
111 :Y=0
115 :C=N/B
120 :IF C=0 GOTO155
125 :D=INT(C)
130 :R=N-D*B'RESTO
135 :Y=Y+R*10^Z
140 :U=(N-R)/B
145 :N=U
150 :Z=Z+1
152 :GOTO115
155 :PRINT Y
160 :BEEP
161 :END
```

b) BAS2, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99 :REM: BAS2. RITORNO ALLA BASE 10
100 : INPUT "M="; M : DATO
105 : INPUT "B="; B : BASE
110 : Z=0
111 : Y=0
115 : C=M/10
120 : IF C=0 GOTO 155
125 : D=INT(C)
130 : R=M-10*D
135 : Y=Y+R*B^Z
140 : U=(M-R)/10
145 : M=U
150 : Z=Z+1
152 : GOTO 115
155 : PRINT Y
160 : BEEP
161 : END
```

## VIII - Calcoli con valori approssimati

### 1. - Calcolo della costante di Archimede

#### 1.1. - Il problema della determinazione di $\pi$

Richiamiamo brevemente ciò che è stato detto nel cap. IV della Parte I a proposito del significato della operazione di risoluzione di un problema matematico: si tratta di migliorare le informazioni che si hanno; ma si tratta anche di non fornire mai delle informazioni false o illusorie, come può accadere quando si forniscono delle cifre che non hanno significato, come abbiamo osservato ripetutamente.

Riteniamo che la riflessione sul problema della determinazione della costante di Archimede sia molto utile per dare un'idea precisa del significato di questi enunciati, per la importanza che, durante la storia della Matematica, ha avuto il problema della quadratura del cerchio e per la suggestione che questo problema esercita ancora oggi sui profani.

Si suole chiamare "costante di Archimede" ed indicare con il simbolo  $\pi$  (pigreca) il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro (o - se si vuole - della semicirconferenza al raggio).

In base a noti teoremi di Geometria elementare, tale costante è uguale anche al rapporto tra l'area del cerchio e quella del quadrato che ha per lato il raggio del cerchio stesso.

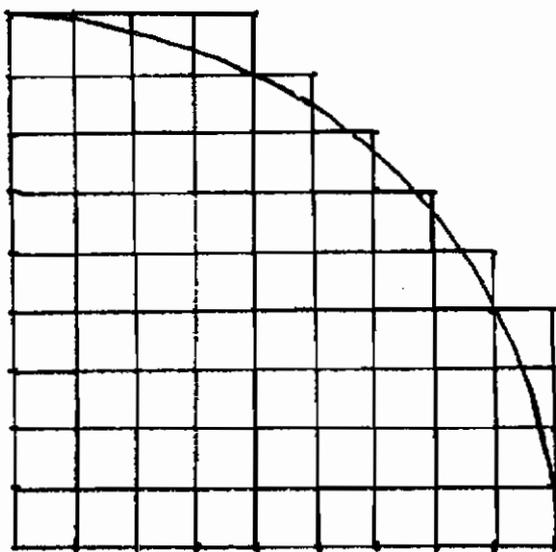
Queste proprietà della costante pigreca sono state utilizzate fino dai primordi della vita civile per stimare il valore della costante stessa. Già nella Bibbia (III Libro dei Re, Cap. VII, 23 e sqq. e nel passo parallelo dei Paralipomeni, Libro II, Cap. IV, 2) si trova detto, nella descrizione della costruzione del Tempio di Gerusalemme, che l'architetto (Hiram di Tiro) fece un "mare" (un bacino) di bronzo, che aveva un diametro di 10 cubiti e che veniva circondato da una cordicella lunga 30 cubiti. Dal che gli storici deducono che a quei tempi la circonferenza venisse stimata lunga 3 volte il diametro; il che rappresenta una stima molto grossolana, se si pensa che ciò equivarrebbe a "confondere" la circonferenza con l'esagono regolare inscritto.

Documenti egiziani inducono a credere che gli Egiziani utilizzassero procedimenti equivalenti ad adottare per  $\pi$  un valore che può essere espresso, in notazioni moderne, con la formula:

(1)  $\pi = 4(8/9)^2 = 3.1604 \dots$

e quindi con un errore, per eccesso, minore di 0.02. Lo storico G. Vacca ha cercato di escogitare una spiegazione di questa valutazione di pigreca da parte degli Egiziani, supponendo che essi prendessero in considerazione la figura ottenuta da un quadrato e dal quarto della circonferenza che ha il suo centro in un vertice ed ha per raggio il lato del quadrato.

Diviso il lato di questo in 9 parti, e di conseguenza il quadrato stesso in 81 quadratini parziali, si può "stimare" ad occhio la superficie coperta dal quarto di circonferenza come data da 64 quadratini, valutando un certo compenso tra le parti dei quadratini attraversate dalla circonferenza lasciate fuori da questo computo e quelle rimaste nell'interno.



(Si veda per es. I. Gherzi - Matematica dilettevole e curiosa - Milano, Hoepli, 1929).

Archimede, il grande geometra siracusano, diede per  $\pi$  una valutazione che può essere espressa dalle limitazioni seguenti:

(2)  $22/7 > \pi > 223/71$

Il metodo seguito da Archimede per raggiungere il risultato esposto fu di inscrivere e circoscrivere alla circonferenza dei poligoni regolari, valutando i perimetri di questi, ed osservando che ovviamente la lunghezza della circonferenza è compresa tra quella del perimetro di un poligono in-

scritto e quello del corrispondente poligono regolare circoscritto, avente lo stesso numero di lati.

Nicolò da Cusa (Cardinale Nicolaus Cusanus: 1401-1464) diede un altro metodo per la valutazione di  $\pi$ , metodo che viene richiamato come "metodo degli isoperimetri" (cfr. U. Cassina - Calcolo numerico - Bologna, 1928).

I tre metodi ora esposti possono dare luogo a programmazioni su piccole macchine tascabili programmabili, perchè fanno ricorso a considerazioni di Geometria elementare.

Ricordiamo che è stato dimostrato da Lindemann del 1882 che  $\pi$  è un numero "trascendente", cioè che non può essere radice di una equazione algebrica a coefficienti interi; segue da qui, in particolare, che il problema della "quadratura del cerchio", cioè della costruzione con riga e compasso, del lato del quadrato che ha area uguale a quella di un cerchio di dato lato, non è risolvibile, contro la opinione di tanti fissati che ancora oggi si illudono di poter dare una risposta elementare a questa intricata questione.

Si conoscono oggi milioni di cifre della successione della rappresentazione decimale di  $\pi$  ottenute con l'impiego di potenti macchine calcolatrici. Le prime 707 cifre decimali sono state ottenute da Shanks nel 1873 e sono date dalla tabella seguente:

$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510$   
 $58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34225\ 34211\ 70670$   
 $82148\ 09661\ 32833\ 06647\ 09384\ 48086\ 50582\ 23172\ 53594\ 08128$   
 $48111\ 74502\ 84102\ 70193\ 85211\ 06559\ 84462\ 29489\ 54930\ 33196$   
 $44288\ 10976\ 66598\ 34461\ 28475\ 64823\ 37867\ 83166\ 27120\ 19091$   
 $45648\ 56692\ 34603\ 48610\ 45432\ 66482\ 13393\ 60728\ 02491\ 41273$   
 $73458\ 70068\ 06316\ 58817\ 48815\ 20920\ 96282\ 92640\ 91715\ 36436$   
 $78925\ 90360\ 01133\ 05306\ 48820\ 46652\ 13841\ 48961\ 94151\ 16094$   
 $33057\ 27036\ 57596\ 91963\ 09218\ 61173\ 81932\ 61179\ 31051\ 18648$   
 $07446\ 23799\ 62749\ 56735\ 18857\ 52724\ 89122\ 79381\ 83011\ 94912$   
 $98336\ 73362\ 44065\ 66430\ 86021\ 39601\ 60924\ 49077\ 23094\ 36285$   
 $53096\ 62027\ 55693\ 97986\ 95022\ 24749\ 96200\ 07497\ 03041\ 23668$   
 $86199\ 51100\ 89202\ 38377\ 02131\ 41894\ 11902\ 98868\ 25446\ 81639$   
 $79990\ 46597\ 00081\ 70029\ 63123\ 77387\ 34208\ 41307\ 91451\ 18396$   
 $05709\ 86 \dots$

Daremo qui di seguito alcuni metodi per la determinazione di valori approssimati della costante di Archimede.

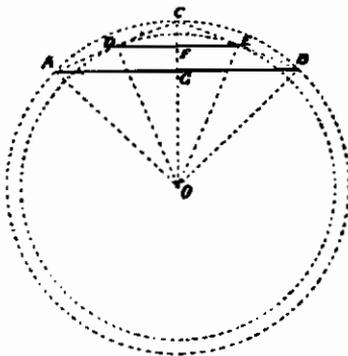
I metodi che esporremo richiedono soltanto considerazioni di Geometria elementare, e pertanto sono utilizzabili nelle scuole dell'ordine medio. La ripetizione dei calcoli che essi richiedono rende particolarmente istruttivo l'impiego delle piccole calcolatrici e permette all'insegnante accorto di distinguere, ancora una volta, tra il livello dei concetti teorici e quello della esecuzione materiale dei calcoli, mettendo in evidenza la possibilità di utilizzazione intelligente dei nuovi mezzi di calcolo.

### 1.2. - Metodo degli isoperimetri

Questo metodo è fondato sulle relazioni che legano i raggi e gli apotemi di due poligoni regolari isoperimetri, di cui l'uno ha un numero doppio di lati dell'altro.

A tale proposito è ben noto che se  $r$  ed  $a$  indicano il raggio e l'apotema di un poligono regolare di  $n$  lati, ed  $r'$  ed  $a'$  indicano il raggio e l'apotema del poligono regolare di  $2n$  lati ed isoperimetro al poligono precedente si ha:

$$(3) \quad a' = (a+r)/2 \quad \text{ed} \quad r' = \sqrt{r a'}$$



Siano  $AB$  il lato ed  $O$  il centro del poligono dato. Allora se  $OC$  è perpendicolare ad  $AB$ , dalla figura si ha:

$$OC = r, \quad OG = a.$$

Se  $D$  ed  $E$  sono i punti medi delle corde  $AC$  e  $BC$  si ha:  $DE = AB/2 =$  lato del poligono regolare che ha lo stesso perimetro e numero di lati dop-

pio di quello dato.

D'altra parte:

$$\widehat{DOE} = \widehat{AOB}/2$$

quindi:

$$OD = r \quad \text{ed} \quad OF = a'$$

Ora:

$$OC = OF + FG, \quad OG = OF - FG,$$

quindi:

$$OF = (OG + OC)/2 \quad \text{ossia:} \quad a' = (a + r)/2$$

Inoltre, dal triangolo rettangolo ODC, si ha:

$$\overline{OD}^2 = OC \times OF, \quad \text{cioè:} \quad r'^2 = r a' \quad \text{c.d.d.}$$

Quindi l'apotema del nuovo poligono, che ha lo stesso perimetro ed il numero di lati doppio, è la media aritmetica tra il raggio e l'apotema del poligono di partenza; il raggio della circonferenza in cui tale poligono è inscritto è la media geometrica tra il raggio del poligono precedente ed il nuovo apotema trovato.

Ripetendo il calcolo, si ottengono dei valori sempre più approssimati del raggio della circonferenza la cui lunghezza si approssima sempre di più a quella del poligono di partenza (e di tutti i successivi).

Nei programmi che presentiamo qui di seguito si parte da un quadrato circoscritto a una circonferenza di raggio unitario. Quindi il primo apotema vale 1 ed il primo raggio vale  $\sqrt{2}$ . La lunghezza del perimetro vale ovviamente 8.

a) Programma in linguaggio BASIC (Sharp 1245 PC)

100: A=1

110: B= $\sqrt{2}$

Introduzione dei dati iniziali.

120: C=(A+B)/2

Calcolo della media aritmetica.

130: D =  $\sqrt{B \times C}$

Calcolo della media geometrica tra il secondo valore dato e quello trovato in 120.

140: E = 4/D

Calcolo del rapporto tra la lunghezza del poligono (dimezzata) ed il raggio; questo rapporto tende verso il valore di pigreca.

150: PRINT E

Visualizza il valore trovato.

160: A=C

170: B=D

Introduce i due valori trovati nelle memorie iniziali A e B per poter ricominciare.

180: GOTO 120

Ordina di ricominciare.

Dopo 14 passi si arriva al valore 3.14159265.

b) Programma per CASIO FX 602P

1 - P3 MC 1 Min 01 2√ Min 02

La istruzione MAC azzerata tutte le memorie. Le altre due introducono i valori 1 e  $\sqrt{2}$  nelle memorie 01 e 02 rispettivamente.

2 - LBL 0 (MR 01 + MR 02)/2) Min 03

Calcola la media aritmetica e la introduce in 03.

3 - ((MR 02 x MR 03) √) Min 04

Calcola la media geometrica tra il valore trovato con 2 e il valore precedente.

4 - MR 04 HLT

Visualizza il valore trovato.

5 - MR 03 Min 01 MR 04 Min 02 GOTO 0

Introduce i due valori trovati nelle memorie di partenza e ordina di ripetere il calcolo.

Dopo 14 passi il risultato si stabilizza in 1.273239546.

E' questo il valore del raggio r che dà la lunghezza della circonferenza uguale ad 8. Quindi si ha:

$$\pi = 4/r = 3.14159265.$$

1.3. - Metodo dei perimetri

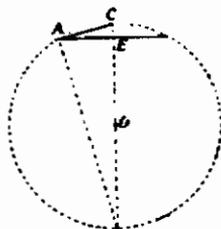
E' questo il metodo adottato da Archimede, che conduce a valutare la

lunghezza dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti ad una medesima circonferenza di dato raggio; la lunghezza della circonferenza è ovviamente compresa tra quelle dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti.

Il calcolo si fonda sulle seguenti considerazioni:

se  $a$  ed  $a_2$  sono i lati di due poligoni regolari inscritti in un cerchio di raggio 1, di cui il secondo ha un numero di lati doppio del primo, dalla geometria elementare, si ha:

$$(4) \quad a_2 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$



Infatti AC è medio proporzionato fra il diametro e CE, ossia:

$$a_2^2 = 2(1 - OE) = 2 - 2 OE.$$

Ma:

$$OE = \sqrt{1 - a^2/4}$$

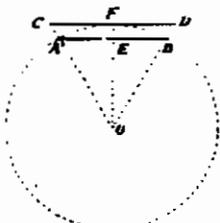
quindi:

$$a_2^2 = 2 - \sqrt{4 - a^2}$$

e quindi la (4).

D'altra parte è noto che fra i dati  $a'$  ed  $a$  di due poligoni regolari dello stesso numero di lati, il primo circoscritto ed il secondo inscritto in un cerchio di raggio 1, passa la relazione:

$$(15) \quad a' = 2 a / \sqrt{4 - a^2}.$$



$$a' = CD, a = AB$$

Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10) per l'applicazione delle formule precedenti:

```
99:REM:RETTIFICAZIONE CON PERIMETRI
100:A=1
105:N=1
110:B=4-A*A
115:C=SQR(B)
120:D=2-C
125:E=SQR(D)'LATO INSCRITTO
126:P=2+C
127:Q=SQR(P)
128:R=2*E/Q'LATO CIRCOSCRITTO
130:F=3*E*(2^N)'INSCRITTO
131:G=3*R*(2^N)'CIRCOSCRITTO
135:PRINT F
136:PRINT G
140:PRINT N
141:STOP
145:A=E
150:N=N+1
155:GOTO 110
160:END
```

#### OSSERVAZIONE

Le istruzioni 110-125 realizzano il calcolo del valore dato dalla formula (4); le 126-128 realizzano il calcolo del valore dato dalla (5). Il numero N dà il numero di cicli eseguiti.

Ripetendo il calcolo per N da 1 ad 11 si ottiene la seguente tabulazione di valori (la macchina dà 13 cifre, ma sono riportate soltanto quelle che servono per il confronto tra i valori per difetto e quelli corrispondenti per eccesso):

N	Valore per difetto	Valore per eccesso
1	3.1	3.2
2	3.13	3.15
3	3.13	3.14
4	3.141	3.142
5	3.1414	3.1418
6	3.1415	3.1416
7	3.1415	3.1416
8	3.141590	3.141597
9	3.141592	3.141593

N	Valore per difetto	Valore per eccesso
10	3.141592	3.141593
11	3.141593	3.1415931

Come si vede, dopo 10 passaggi la macchina dà un valore per difetto errato. Ciò è dovuto al fatto che, pur essendo il procedimento teoricamente perfetto, nella pratica del calcolo la 125 (che riproduce la formula (4)) dà dei numeri troppo piccoli; quindi il gioco degli arrotondamenti porta poi a dei risultati errati quando i numeri arrotondati vengono moltiplicati per fattori grossi come quello dato nella 130 o nella 131. E ciò nonostante il fatto che la macchina dia 13 cifre decimali. Dopo 11 cicli, 8 di quelle cifre sono false e quindi la precisione è del tutto illusoria.

#### 1.4. - Quadratura del cerchio

Alla valutazione di  $\pi$  si può giungere anche con il procedimento degli antichi Egiziani, di cui abbiamo detto, cioè cercando di valutare direttamente l'area del cerchio o di una sua parte (per esempio un quarto).

Sarebbe difficile fare queste valutazioni direttamente, ma l'impiego di una macchina, anche poco potente, permette di risparmiare la fatica dei calcoli numerosi che si dovrebbero fare, per sfruttare il più possibile il concetto.

Il problema può essere impostato nel modo seguente: si consideri in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $x, y$  la circonferenza che ha il centro nell'origine e raggio uguale ad 1. La sua equazione è ovviamente:

$$(6) \quad x^2 + y^2 = 1$$

ed il quarto di cerchio compreso nel primo quadrante è quindi limitato dagli assi e dalla curva di equazione:

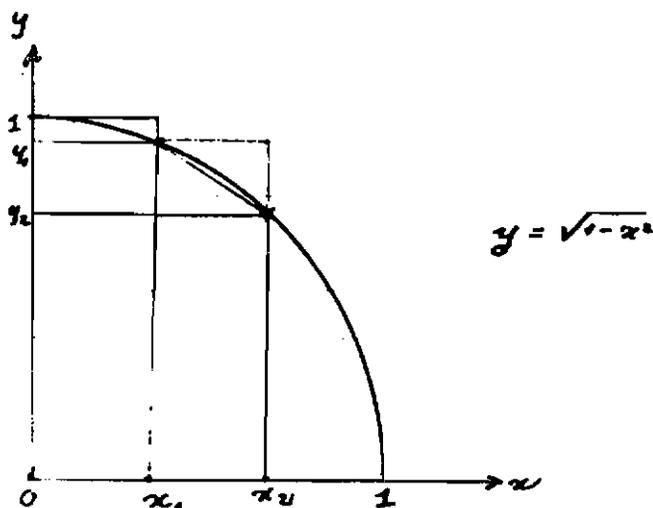
$$(7) \quad y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Per valutare l'area di questa figura si scelgono dei valori delle ascisse, si calcolano le corrispondenti ordinate con la (7) e si fa la somma delle aree dei rettangoli circoscritti, oppure inscritti nella curva,

oppure dei trapezi inscritti; quest'ultima scelta equivale ovviamente a sostituire alla curva la corda che unisce due punti consecutivi della suddivisione della curva, che corrispondono alla suddivisione dell'intervallo:

$$(8) \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

La scelta della distanza tra due punti consecutivi (il "passo" della suddivisione) determina la precisione della valutazione.



Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```

99:REM P1GR3.QUADRATURA QUARTO DI CERCHIO
100:INPUT"P=";P
110:A=1
115:N=0
120:X=P
130:B=1-X*X
140:IF B<0 GOTO200
150:Y=SQR(B)
160:A=A+Y
170:X=X+P
180:N=N+1
190:GOTO130
200:S=4*P*A
205:PRINTS
206:PRINTN
210:A=A-1
215:R=4*P*A
220:PRINTR
225:A=A+0.5
227:T=4*P*A
228:PRINTT
230:END

```

## OSSERVAZIONI

- a) La istruzione 150 dà il valore della ordinata corrispondente alla ascissa X.
- b) L'input P dà il passo, cioè la distanza tra due valori consecutivi della variabile indipendente X.
- c) La 140 ferma la procedura quando si giunge a superare l'ascissa  $X=1$ .
- d) La 200 dà l'area dello scaloide circoscritto, e quindi una valutazione per eccesso. La 215 dà l'area dello scaloide inscritto: infatti, dato che la curva a destra incontra l'asse delle x, basta sottrarre la prima ordinata a sinistra (che vale 1) dal contatore A, che accumula tutti i valori delle ordinate. La 227 dà la valutazione con trapezi; infatti in questo caso ogni ordinata viene contata due volte per le aree dei trapezi, esclusa la prima.
- e) La 206 fornisce il numero dei passi fatti, per una verifica.

Risultati numerici (abbiamo riportato soltanto le cifre decimali che servono per un confronto tra i due valori per difetto e quello per eccesso):

P	N	S	R	T	Tempo di calcolo
0.01	100	3.16	3.12	3.14	30 s circa
0.001	1000	3.14355	3.13955	3.14155	5 min circa
0.0005	2000	3.1425	3.1405	3.1415	10 min circa
0.00025	4000	3.14208	3.141088	3.141585	20 min circa

Come si vede, il tempo diviene relativamente lungo, ma la macchina permette di risparmiare la fatica delle migliaia di calcoli.

## 2. - Procedimenti di iterazione

### 2.1. - Generalità sui procedimenti iterativi

La parola "iterazione" significa ripetizione; pertanto il suo significato potrebbe essere giudicato molto generico e poco preciso, perchè, come abbiamo detto ripetutamente nella Parte I (in particolare nel cap. IV) nel

la maggioranza dei casi la risoluzione di un problema matematico consiste nel migliorare le informazioni che si posseggono solo implicitamente dai dati del problema stesso; e questo miglioramento si ottiene ripetendo i procedimenti che conducono al miglioramento delle informazioni.

Tuttavia si suole indicare con la espressione "procedimento di iterazione" un procedimento che si realizza con il calcolo del valore di una funzione:

$$(1) \quad y = f(x)$$

e con la reintroduzione del valore trovato come argomento della funzione  $f$ ; ripetendo la operazione, si viene così a costruire una successione di valori numerici:

$$(2) \quad x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

definita dalla equazione:

$$(3) \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Naturalmente, quando si voglia utilizzare questa procedura per il calcolo della soluzione di un problema, è assolutamente necessario garantire che la successione (2) sia convergente, ed abbia come valore limite il valore cercato.

Questa dimostrazione - ripetiamo, indispensabile - può richiedere l'impiego di strumenti della Matematica superiore. Tuttavia è spesso possibile garantire la convergenza della successione (2) con considerazioni geometriche che oppure con procedimenti elementari, come si vedrà nel seguito.

Da quanto precede, si trae che i valori della successione (2), beninteso nei casi in cui essa converga, forniscono delle valutazioni approssimate del valore numerico cercato. Una delle operazioni più importanti quando si utilizzano questi procedimenti consiste nella valutazione dell'ordine di approssimazione dei valori che si ottengono; infatti spesso le macchine che si utilizzano per i calcoli forniscono molte cifre dei risultati dei calcoli; ma esse sono spesso prive di significato per quanto riguarda le informazioni che si cercano in relazione ad un determinato problema, come abbiamo già detto nel par. 1 del cap. V della I Parte.

Gli esempi che presenteremo in seguito e gli esercizi che svolgeremo chiariranno ulteriormente il nostro pensiero; ripetiamo qui che la valutazione critica delle informazioni fornite dalle macchine costituisce un momento formativo indispensabile per l'impiego intelligente delle macchine stesse.

## 2.2. - Procedimento di Erone per l'approssimazione della radice quadrata di un numero

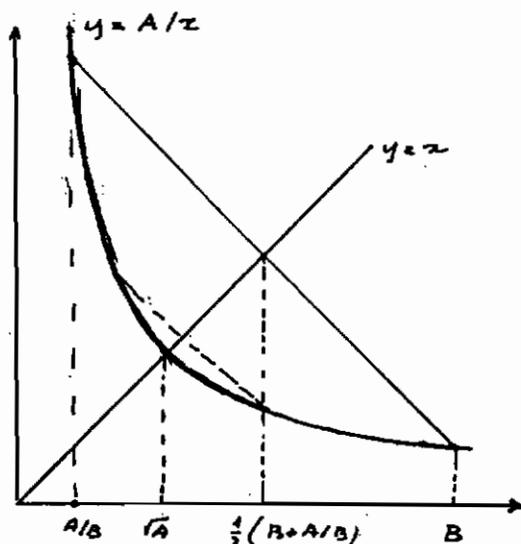
Il calcolo della radice quadrata di un numero costituisce spesso il primo incontro dello studente con i numeri irrazionali; anche nei corsi elementari si insegna il calcolo di valori approssimati della radice quadrata, dimenticando spesso di osservare che questo procedimento consiste - come abbiamo osservato più volte - nella programmazione metodica di tentativi per migliorare le approssimazioni (cioè le informazioni) che già si hanno.

Il procedimento che presentiamo risale alla Geometria greca. Esso può essere applicato anche con macchinette non programmabili. La sua interpretazione geometrica potrà costituire un utile esercizio anche degli elementi di Geometria analitica.

Con questo procedimento si costruisce la successione definita nel modo seguente: considerato un numero positivo  $A$ , si ha:

$$(1) \quad x_{n+1} = 0.5 (x_n + A/x_n)$$

La illustrazione geometrica che si può dare della formula (1) conduce a concludere che la successione converge, avendo come valore limite la radice quadrata di  $A$ ; ciò si vede nella figura che dà l'interpretazione geometrica del problema, come ricerca del punto di intersezione tra la retta  $y=x$  e la iperbole equilatera  $xy=A$ .



Programma (Sharp 1245 PC)

600: INPUT "A=";A

Introduce il radicando nella memoria A.

610: INPUT "B=";B

Introduce nella memoria B un valore approssimato per eccesso.

615: INPUT "N=";N

Introduce il valore dell'ordine di approssimazione (cfr. 640).

620: C=(B+A/B)/2

Determina il punto medio della corda della iperbole.

630: E=B-C

Calcola la differenza tra il valore di partenza e quello trovato con 620.

640: IF E < 10 ^ (-N) GOTO 670

Determina la fine del procedimento se la approssimazione determinata è stata conseguita.

650: B=C

Se ciò non è, introduce il valore trovato nella memoria B per ripetere il calcolo.

660: GOTO 620

Ordina di ripetere il calcolo.

670: PRINT C

Visualizza il risultato quando l'approssimazione è stata conseguita.

## OSSERVAZIONE

I valori che si ottengono sono approssimati per eccesso.

### 2.3. - Altri procedimenti elementari di iterazione

Nel paragrafo precedente abbiamo dato un esempio di procedimento iterativo, che per il calcolo della funzione richiede soltanto delle operazioni razionali.

Vogliamo qui dare qualche esempio di procedimenti iterativi che sfruttano le possibilità di macchine piccole.

Sia per esempio da calcolare la radice cubica di un numero positivo  $A$ , utilizzando una macchina piccola, che possiede soltanto il comando della radice quadrata. Il problema può essere tradotto in quello della risoluzione della equazione:

$$(1) \quad X^3 = A$$

Orbene la stessa equazione può essere scritta nella forma:

$$(2) \quad X^4 = A X$$

e di qui si può giungere alla costruzione di una successione di valori che converge alla radice della (1) mediante la funzione:

$$(3) \quad X_{n+1} = \sqrt{\sqrt{A X_n}}$$

Il calcolo può essere eseguito a mano con una macchina molto piccola; si verifica che la (3) dà luogo ad una successione monotona; crescente se si parte da un valore approssimato per difetto della radice della (1), decrescente se si parte da un valore approssimato per eccesso. Analoghe considerazioni valgono per la ricerca della soluzione della equazione:

$$(4) \quad X^7 = A .$$

Scritta la equazione (4) nella forma:

$$(5) \quad X^8 = A X$$



cui la prenderemo in considerazione. Supponiamo inoltre che essa sia decre-  
scente, e soddisfi inoltre alla seguente condizione: negli intervalli in  
cui la prenderemo in considerazione ogni tangente della curva abbia un coeffi-  
ciente angolare in valore assoluto minore di 1.

In queste condizioni si può dimostrare che esiste un unico punto di  
intersezione tra la curva (2) e la retta (3), che abbia ascissa positiva;  
questa ascissa può essere valutata con il procedimento iterativo seguente:  
fissato un valore  $x_0$  iniziale, si consideri il punto  $P_0$  della curva che ha  
ascissa  $x_0$  e si fissi l'attenzione sul punto  $Q_0$  della retta (3) che ha la  
ordinata uguale a quella di  $P_0$ ; si chiami  $x_1$  l'ascissa di  $Q_0$  e si conside-  
ri il punto  $P_1$  della curva (2) che ha ascissa  $x_1$ . Tale punto avrà ordinata  
uguale a quella di un punto  $Q_1$  della retta (3), la cui ascissa  $x_2$  dà luogo  
ad un punto  $P_2$  della curva (2) e così via.

Si può dimostrare che, se sono soddisfatte le condizioni enunciate so-  
pra per la curva  $f$ , la successione dei valori  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) è conver-  
gente ed ha come limite l'ascissa del punto cercato.

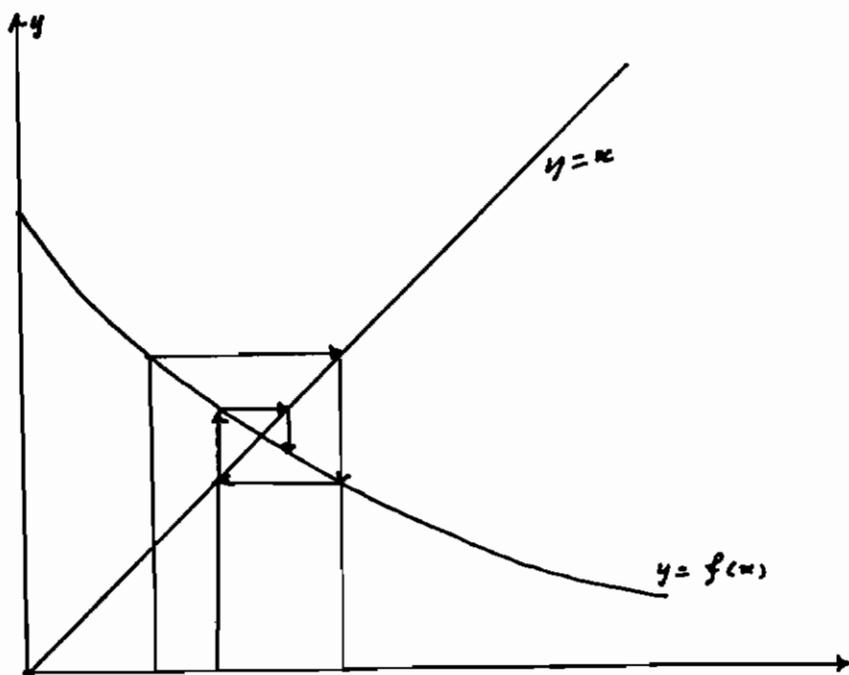
Si ha inoltre che se, per esempio  $x_0$  forniva una valutazione per di-  
fetto della radice cercata, la successione dei valori di posto pari  $x_0$ ,  
 $x_2$ ,  $x_4$ , ... è costituita da valori crescenti e tutti per difetto, e la  
successione dei valori di posto dispari è costituita da valori tutti per  
eccesso, e tutto decrescenti.

Non diamo qui la dimostrazione di questi fatti, e rimandiamo alla fi-  
gura, che illustra in modo soddisfacente la situazione. Ci limitiamo ad os-  
servare che un procedimento che dia luogo ad una successione con queste ca-  
ratteristiche realizza ciò che abbiamo detto nel Cap. IV della Parte I,  
parlando di miglioramento delle informazioni.

Si ha infatti una successione di valori data dalla formula:

$$(4) \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

e si sa che la radice cercata della equazione (1) è sempre compresa tra  
due elementi successivi della successione. Pertanto è sempre possibile as-  
segnare ad ogni stadio del calcolo l'errore della determinazione della ra-  
dice, evitando di fornire informazioni false o fuorvianti.



Esempio 1 - La equazione:

$$(5) \quad x^2 + x - 1 = 0$$

a cui si è condotti quando si cerchi la sezione aurea del segmento unitario, può essere scritta nella forma:

$$(6) \quad x = 1/(x+1)$$

Scritta sotto questa forma, la radice positiva della (5) può essere approssimata con un procedimento a ragnatela del tipo che abbiamo descritto.

**Esempio 2** - Sia  $N$  un numero positivo qualunque, maggiore di 1, e sia  $A$  un intero che fornisce una valutazione approssimata della radice di  $N$ ; si avrà quindi:

$$(7) \quad A^2 < N < (A+1)^2$$

Indichiamo con  $X$  la soluzione della equazione:

$$(8) \quad (X+A)^2 = N$$

si avrà quindi:

$$(9) \quad 0 < X < 1$$

e dalla (8):

$$(10) \quad X^2 + 2AX = N - A^2$$

Posto:

$$(11) \quad B = N - A^2$$

si ha certamente:

$$(12) \quad B > 0$$

e la (10) può essere scritta nella forma:

$$(13) \quad X = B/(X+2A).$$

Pertanto il numero  $X$  può essere approssimato con un procedimento a ragnatela del tipo che abbiamo descritto.

**Esempio 3** - Si consideri il problema posto da G. Cardano a N. Tartaglia: "Dividi 10 in quattro parti in proporzione continua, di cui la prima sia  $2^m$ ".

Tale problema può essere tradotto nella equazione:

$$(14) \quad 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 = 10$$

ossia:

$$(15) \quad x^3 + x^2 + x = 4$$

Posto:

$$(16) \quad x = z + 1,$$

la equazione (15) può essere scritta nella forma seguente:

$$(17) \quad z^3 + 4z^2 + 6z = 1$$

ossia:

$$(18) \quad z = 1/(6 + 4z + z^2)$$

In questa forma la sua radice positiva può essere approssimata con un procedimento a ragnatela, che conduce rapidamente a dare le seguenti limitazioni per Z:

$$(19) \quad 0.150911083 < z < 0.150911084 .$$

Esempio 4 - Equazione di Leonardo Pisano:

$$(20) \quad x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

(Per la attribuzione a Leonardo Pisano cfr. U. Cassina - Calcolo numerico - pag. 364).

Anche la (20) può essere scritta nella forma:

$$(21) \quad x = 20/(10 + 2x + x^2)$$

e quindi la determinazione della sua radice positiva può essere ottenuta con un procedimento a ragnatela. Si ha:

$$x = 1.368808107 \dots$$

#### OSSEVAZIONE

La espressione della funzione  $f(x)$  che può dare luogo ad un procedimento a ragnatela non deve necessariamente essere ottenuta con operazioni razionali, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 5 - Sia da risolvere la equazione (1) del paragrafo 2.3.:

$$(22) \quad x^3 = A \quad \text{con } A \text{ positivo}$$

Questa può essere scritta nella forma:

$$(23) \quad x = \sqrt{A/x}$$

e quindi può dare luogo ad un procedimento a ragnatela, purchè si parta da un valore abbastanza vicino ad un valore stimato di  $\sqrt[3]{A}$ .

Esempio 6 - La equazione

$$(24) \quad x^3 = 2x + 5$$

è stata proposta da I. Newton, come esempio per l'applicazione del metodo per la risoluzione delle equazioni che porta il suo nome.

Essa può venir scritta nella forma:

$$(25) \quad x = \sqrt{2 + 5/x}$$

e pertanto la sua radice positiva può essere determinata con un procedimento a ragnatela. Si ottiene:

$$2.094551481 < x < 2.094551482 .$$

Esempio 7 - Un quesito posto a N. Tartaglia da G. Tonini da Coi (cfr. U. Cassina - Op. cit. pag. 391) può essere tradotto nella equazione:

$$(26) \quad x^3 + 3x^2 = 5$$

la quale può essere scritta nella forma:

$$(27) \quad x = \sqrt{5/(3+x)}$$

e pertanto la sua radice positiva può essere approssimata con un procedimento a ragnatela; si ottiene:

$$x = 1.103803403 \dots$$

## 2.5. Procedimenti iterativi con frazioni continue

Come è noto, le serie decimali non sono il solo mezzo per rappresentare i numeri irrazionali: esistono anche altri algoritmi infiniti, che sono utilizzati meno frequentemente, soprattutto oggi, ma che possono essere utilizzati per esercizi interessanti e formativi.

Uno di tali algoritmi è dato dalle "frazioni continue": non intendiamo qui esporne la teoria generale e pertanto ci limitiamo a trattare un esempio, lasciando al lettore le facili generalizzazioni.

Sia, per es., il decimale 1.23; esso può venire scritto nella forma  $1+0.23 = 1 + 1/4.347826\dots$ ; a sua volta il decimale 4.347826... può essere scritto nella forma:

$$4 + 0.347826\dots = 4 + 1/2.875\dots$$

Proseguendo nella rappresentazione si ottiene:

$$(1) \quad 1.23 = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}$$

espressione che viene chiamata "frazione continua (discendente)".

I numeri 1,4,2,1,7 vengono chiamati "quozienti parziali" della frazione continua. Per evitare notazioni che occupano troppo spazio, si suole convenire di elencare soltanto i quozienti parziali; pertanto, invece della scrittura data dalla (1) si adotta la scrittura convenzionale:

$$(2) \quad 1.23 = [1 | 4 | 2 | 1 | 7] .$$

Le frazioni continue:

$$(3) \quad [1]; [1|4]; [1|4|2]; [1|4|2|1]$$

vengono chiamate "ridotte" della (2).

Per queste frazioni continue valgono le seguenti proprietà, che sono di facile dimostrazione ma che noi dobbiamo limitarci ad enunciare:

- i) le ridotte di posto dispari (primo, terzo, ecc.) forniscono dei valori approssimati per difetto del numero rappresentato dalla frazione continua; le ridotte di posto pari (secondo, quarto, ecc.) forniscono invece dei valori approssimati per eccesso;
- ii) il razionale che dà ogni "ridotta" si presenta come frazione ridotta ai minimi termini; pertanto esso viene rappresentato con la massima economia di simboli.

Queste proprietà si possono facilmente verificare sulle ridotte (3): si ha infatti la successione:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 + 2/9 = 1.(2) \\ 1 + 23/100 = 1.23 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1 + 1/4 = 5/4 = 1.25 \\ 1 + 3/13 = 1.(230769) \end{array}$$

Ovviamente, quando si abbia un numero irrazionale, la frazione continua che lo rappresenta è infinita; ma sono sempre valide le proprietà enunciate. Queste possono essere sfruttate per escogitare delle costruzioni geometriche approssimate di segmenti aventi misure irrazionali, oppure, di angoli che hanno funzioni trigonometriche rappresentate da numeri irrazionali.

In particolare quando si prenda in considerazione la funzione "tangente" è possibile rappresentare con approssimazione grande quanto si vuole degli angoli aventi come funzioni trigonometriche dei numeri irrazionali su fogli di carta quadrettata o sul "geopiano".

Sia, per esempio, l'angolo di  $60^\circ$ . Si sa che è:

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = 1.7320507 \dots$$

e l'irrazionale  $\sqrt{3}$  viene rappresentato in frazione continua nel modo seguente:

$$(4) \quad \sqrt{3} = [1|1|1|2|1|2|1| \dots]$$

e già la VI ridotta fornisce il valore  $19/11$  che presenta un errore per eccesso minore di  $5 \cdot 10^{-5}$  e permette quindi una soddisfacente rappresentazione dell'angolo sul geopiano.

Analogamente, per quanto riguarda l'angolo al centro del pentagono regolare, si ha:

$$(5) \quad \tan 72^\circ = 3.0776835 \dots$$

e questo numero è rappresentato in frazione continua con:

$$[3|12|1|6|1|6|1|6| \dots]$$

In questo caso basta la (3) ridotta per avere il valore:

$$40/13 = 3.076 \dots$$

il quale fornisce una approssimazione per difetto con un errore minore di  $210^{-3}$ , errore non rilevabile in una figura tracciata su un ordinario foglio di carta quadrettata.

Esercizi analoghi, e in corrispondenza, delle costruzioni analoghe si possono escogitare in relazione al problema geometrico di costruire il lato del poligono regolare in funzione del raggio della circonferenza circoscritta. Ci limitiamo qui a dare lo sviluppo in frazione continua del lato del poligono regolare di 7 lati; tale frazione, nelle sue prime ridotte, è data dal doppio di:

$$[0|2|3|3|1|3| \dots]$$

Lasciamo al lettore di verificare per esercizio una circostanza che era già stata rilevata dal grande pittore ed incisore A. Dürer: il lato del poligono regolare di 7 lati differisce di poco dalla metà del lato del triangolo regolare inscritto nella medesima circonferenza. Anche la determinazione dell'entità della differenza e le costruzioni approssimate dei lati dei due poligoni sono lasciate qui per utile esercizio al lettore.

Esporre qui di seguito un metodo per la determinazione della radice positiva di una equazione quadratica; chiameremo tale metodo "di Lagrange", perchè esso traduce alcune idee che il grande matematico francese utilizzò per approssimare le radici delle equazioni algebriche.

Questo metodo può essere chiamato "iterativo" perchè la sua applicazione richiede la ripetizione di calcoli analoghi, anche se non nella forma elementare che è stata esposta nei paragrafi precedenti.

Sia l'equazione quadratica:

$$(6) \quad A X^2 + B X + C = 0$$

con  $A, B, C$  interi, positivi i primi due, negativo il terzo.

In questo caso l'equazione (6) ha ovviamente una radice positiva.

Sia  $N$  il massimo intero che non supera tale radice; pertanto  $N$  sarà il massimo intero che rende negativo il primo membro della (6), e la radice della (6) che supera  $N$  potrà essere scritta nella forma:

$$(7) \quad X = N + Y$$

dove  $Y$  è ovviamente positivo e minore di 1.

Sostituendo nella (6) si ottiene che  $Y$  è radice positiva e minore di 1 della equazione:

$$(8) \quad Y^2 (AN^2 + BN + C) + Y (2AN + B) + C = 0.$$

Posto:

$$(9) \quad Z = 1/Y$$

si ottiene la equazione:

$$(10) \quad CZ^2 + Z (2AN + B) + (AN^2 + BN + C) = 0 ;$$

su questa equazione si può ripetere la argomentazione di partenza, e si ottiene così la rappresentazione della radice positiva della (6) in frazione continua.

#### OSSERVAZIONE

Per ridurre la (10) alla forma analoga alla (6) occorre cambiare il segno a tutti i coefficienti.

Il programma che segue traduce passo passo la esposizione fatta fin qui.

Programma in linguaggio BASIC (Sharp PC 1245)

90:  $F = AX^2 + BX + C$

95: RETURN

Si tratta della subroutine per il calcolo del primo membro della equaz. (1).

100: INPUT "A=";A

110: INPUT "B=";B

120: INPUT "C=";C

Introduzione dei coefficienti della (1) nelle memorie.

130: X=0

Valore di partenza della esplorazione dei numeri positivi interi.

140: GOSUB 90

Calcolo del valore della funzione che è espressa dal primo membro della (1) e che è data dalla subroutine 90.

150: IF F > 0 GOTO 180

Se l'intero supera la radice, si visualizza il valore approssimato per difetto, secondo la 180; se l'intero non supera la radice, lo si aumenta di una unità e si ricomincia, con le due istruzioni seguenti:

160: X=X+1

170: GOTO 140

180: Z=X-1

190: PRINT Z

Si visualizza il risultato.

200: X=Z

Ora occorre costruire la equazione (5), e lo si fa con le istruzioni seguenti.

210: GOSUB 90

220: G=2AX+B

230: C=-A

240: B=-G

250: A=-F

Costruiti i coefficienti della (5), si ricomincia.

260: GOTO 130

270: END

Il programma precedente fornisce tutti i quozienti parziali della frazione continua che dà la radice della (1). Si pone ora il problema di calcolare le ridotte, cioè i valori razionali che danno le approssimazioni sempre migliori di tale radice. A questo problema risponde una estensione del programma precedente, estensione che si basa sulle osservazioni seguen

ti. Se è data una funzione razionale fratta:

$$(11) \quad (f(x) = (px + q)/(rx + s))$$

della variabile  $x$ , il suo valore, quando si aumenti  $x$  della frazione  $1/y$  si ottiene con la formula:

$$(12) \quad f(y) = (p\tilde{y} + q\tilde{r})/(r\tilde{y} + s\tilde{r})$$

dove si ha:

$$(13) \quad \begin{cases} p\tilde{r} = px + q \\ q\tilde{r} = p \\ r\tilde{r} = rx + s \\ s\tilde{r} = r \end{cases}$$

Ponendo pertanto, inizialmente:

$$(14) \quad p = s = 1 ; \quad q = r = 0$$

le formule (13) forniscono i valori delle funzioni che danno le ridotte successive.

Qui sotto riportiamo soltanto le istruzioni variate ed aggiunte al programma precedente. Ovviamente sono state cancellate 260 e 270.

Il programma completo fornisce: i quozienti parziali (200); il numeratore ed il denominatore della ridotta che corrisponde al quoziente parziale ottenuto (360,370), il valore della ridotta (380).

121\* : P= 1

122\* : Q=0

123\* : R=0

124\* : S=1

340\* : U = P\*Z + Q

350\* : V = R\*Z + S

360\* : PRINT U

370\* : PRINT V

380\* :PRINT U/V

385\* : Q=P

390\* : P=U

405\* : S=R

410\* :R=V

430\* : GOTO 130

440\* : END

### 3. - Soluzione delle equazioni in una incognita

#### 3.1. - Approssimazione di una radice con il metodo del dimezzamento degli intervalli

Abbiamo già detto ripetutamente che cosa si debba intendere per soluzione di un problema matematico; in particolare abbiamo detto che molti problemi matematici si traducono in equazioni, e che ben raramente esistono delle formule per la soluzione delle equazioni stesse. Nel caso in cui tali formule esistano, esse rimandano la procedura di soluzione ad altre procedure, ritenute già note, o al calcolo dei valori di certe funzioni, già conosciute o tabulate.

Di conseguenza l'impiego intelligente delle macchine, anche piccole, può alleviare di molto la fatica di eseguire molti tentativi per migliorare le informazioni che si posseggono.

In molti casi ci si trova di fronte alla situazione seguente: è data una equazione:

$$(1) \quad f(X) = 0$$

la funzione  $f(X)$  essendo continua, in un intervallo:

$$(2) \quad A < X < B;$$

si supponga che la funzione assuma segni diversi negli estremi dell'intervallo cioè sia:

$$(3) \quad f(A) \cdot f(B) < 0.$$

Allora noti teoremi di Analisi matematica assicurano che la equazione (1) ammette almeno una radice nell'intervallo stesso.

Se supponiamo inoltre che la funzione sia crescente (o decrescente) in ogni punto dell'intervallo (2), la radice è unica. Il problema da risolvere consiste nel miglioramento delle informazioni che si hanno, cioè, praticamente, nel costruire un intervallo più corto dell'intervallo (2) e nell'interno del quale si trova la radice.

Un procedimento spontaneo consiste nel considerare il punto medio dell'intervallo: ovviamente se in esso la funzione  $f(X)$  assume valore zero si

è così trovata la radice. In caso contrario si prende in considerazione un nuovo intervallo, di lunghezza ovviamente metà del precedente, nei cui estremi la funzione  $f(x)$  assume valori di segno contrario.

Questa procedura conduce a calcoli molto numerosi e quindi non viene quasi mai applicata manualmente; è invece molto semplice quando viene eseguita a macchina.

a) Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99 :REM:DIM3=DIMEZZAMENTO
100 : INPUT "A=";A
110 :INPUT "B=";B'ESTREMI INTV , A<B
120 :INPUT "E=";E'ERRORE AMMESSO
130 :N=0
135 :D=B-A'LUNGHEZZAINTERVALLO
140 :X=A
150 :GOSUB 900
160 :C=F
170 :M=(A+B)/2
180 :X=M
190 :GOSUB 900
200 :G=F
210 :H=C*G
220 :IF H<0 GOTO270
230 :IF E>D*2^(-N) GOTO 310
240 :A=M
250 :N=N+1
260 :GOTO140
270 :IF E>D*2^(-N) GOTO 310
280 :B=M
290 :N=N+1
300 :GOTO 170
310 :PRINT E*(INT(A/E))
320 :PRINT N
321 :BEEP
330 :END
900 :F=X^3-3*X+1
910 :RETURN
```

La istruzione 170 determina il punto medio dell'intervallo; la 180 calcola il valore di  $f(x)$  nel punto medio; le 210,220 determinano quale sia l'intervallo da prendersi nel passo successivo. Il contatore N conta i cicli e quindi ferma la procedura quando la lunghezza dell'intervallo risulta minore dell'errore E ammesso. La 310 visualizza l'estremo sinistro dell'ultimo intervallo trovato, con le sole cifre che hanno significato; la 320 informa sul numero di cicli.

La subroutine 900 è riferita al caso della equazione:

$$(4) \quad x^3 - 3x + 1 = 0$$

che U. Cassina chiama "equazione di Archimede". Essa infatti traduce in forma algebrica il problema, enunciato da Archimede, di determinare un piano che tagli la semisfera di raggio 1 in due parti aventi volumi uguali.

La radice della (4) compresa tra 0 ed 1 risolve il problema.

b) Programma per CASIO FX 602P

1 - P1 MAC HLT Min 05 HLT Min 03 HLT Min 04

In 05 si mette l'esponente della potenza di 2 (negativa), cioè l'ordine di approssimazione, tenendo conto del fatto che è:

$$2^{-10} < 10^{-3} ; \quad 2^{-20} < 10^{-6} ; \quad 2^{-27} < 8 \cdot 10^{-9}$$

In 03 e 04 si mettono rispettivamente gli estremi dell'intervallo nel quale si sa che cade una radice della equazione.

1 bis - LBL 0 (MR 00 - MR 05)  $x \geq 0$  GOTO 1 (istruzione per la fine della procedura).

2 - MR 03 Min 01 GSB PO MR 02 Min 06

Calcolo del valore della funzione nel primo estremo dell'intervallo mediante la subroutine PO ed introduzione del valore in 06.

3 - ((MR 03 + MR 04)/2) Min 08 MR 08 Min 01 GBS PO MR 02 Min 07

Calcolo del punto medio come semisomma degli estremi; calcolo del valore della funzione in tale punto medio ed introduzione di tale valore in 07.

4 - (MR 06 x MR 07)  $x \geq 0$  GOTO 2

Determinazione del segno della funzione del punto medio. Se è discorde con quello in 03 si trasporta nel punto medio il secondo estremo dell'intervallo con la istruzione seguente.

5 - MR 08 Min 04 ISZ GOTO 0

6 - LBL 2 MR 08 Min 03 ISZ GOTO 0

Se i due valori sono concordi, si trasporta nel punto medio il primo estremo dell'intervallo. In ogni caso si contano i cicli e si ricomincia la procedura.

7 - LBL 2 MR 03 HLT

Viene dalla istruzione 1 bis.

In questo programma l'errore commesso è di segno ignoto ma dell'ordine

di grandezza della potenza negativa di 2 che è stata stabilita ed introdotta in 05, moltiplicata per la lunghezza dell'intervallo di partenza.

c) Esempio.

Si consideri la equazione:

$$(5) \quad x^x = 100$$

che U. Cassina attribuisce ad Eulero (cfr. U. Cassina- Calcolo numerico - pag. 386).

Supponiamo di sapere che la funzione:

$$f(x) = x^x$$

è continua e crescente per  $x$  positivo. Allora un calcolo immediato porta a verificare che si ha:

$$3 < x < 4$$

perchè è:

$$3^3 = 27 ; \quad 4^4 = 256$$

Prendendo i logaritmi volgari di entrambi i membri della equazione data si giunge alla:

$$(6) \quad x \text{ Log} x - 2 = 0$$

Nel linguaggio ora adottato, la subroutine per il calcolo del primo membro della (6) è:

$$(8) \quad \text{PO (MR 01 x (MR 01 Log) - 2) Min 02}$$

Dopo 27 ripetizioni del ciclo si ottiene:

$$x = 3.597285021$$

con un errore minore di  $10^{-8}$ . Quindi la radice della (5) cade in un intervallo di questa lunghezza che ha ~~come~~ come centro il numero ora scritto.

### 3.2. - Approssimazione di una radice con il metodo delle corde

Si consideri ancora la equazione (1) del paragrafo precedente, e si supponga che per la funzione  $f(X)$  siano valide tutte le ipotesi che abbiamo enunciato. Un metodo per dare un valore approssimato della radice nell'intervallo (2) dello stesso paragrafo consiste nell'assumere come tale l'ascissa del punto di intersezione dell'asse delle ascisse con la corda che unisce i due punti della grafica della funzione  $f(X)$  che corrispondono agli estremi dell'intervallo.

La figura allegata illustra la procedura. Nel caso illustrato l'ascissa del punto  $V$  dà una valutazione per eccesso della radice cercata; se questo è il caso, si può ripetere la procedura assumendo il punto  $V$  come estremo destro dell'intervallo, e ricominciare.

Il programma allegato traduce le operazioni geometriche ora presentate.

La subroutine 900 si riferisce alla equazione del paragrafo precedente (la funzione  $\log$  indica in questo caso logaritmo naturale).

Le istruzioni da 120 a 165 portano al calcolo della ascissa di  $V$ . La 160 determina se  $V$  è a destra oppure a sinistra della radice; la 185 oppure 205 arrestano il procedimento quando il miglioramento della informazione è minore del valore ammesso  $E$  dell'errore (Input 110). Se ciò non è, la 200 oppure 220 fanno ricominciare la procedura.

Le istruzioni 221 oppure 223 informano se il risultato ottenuto dà un valore per eccesso oppure per difetto della radice cercata.

La 230 visualizza il numero dei cicli eseguiti.

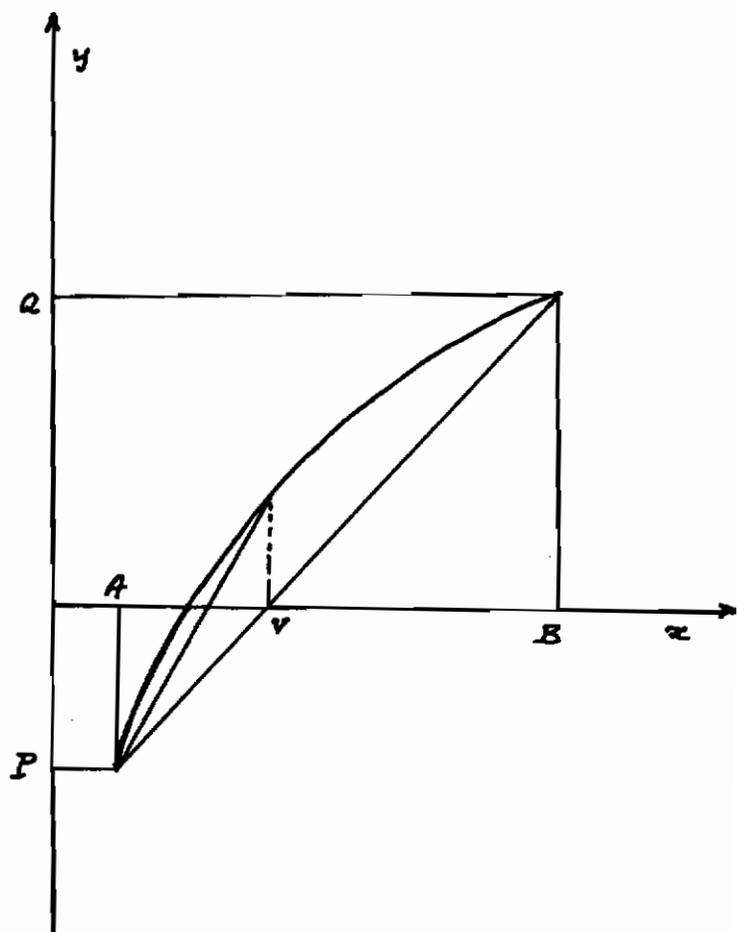
Esempio.

Nel caso della equazione (5) del paragrafo precedente, con il programma allegato, si ottiene:

$$x = 3.597285 \quad \text{per difetto con errore minore di } 10^{-6}.$$

Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99 :REM:CRD2= METODO DELLE CORDE
100 :INPUT"A=";A
105 :INPUT"B=";B'ESTREMI INTERVALLO
110 :INPUT"E=";E'ERRORE AMMESSO
115 :N=0 'N NUMERO DEI CICLI
120 :X=A
125 :GOSUB900
130 :P=F
135 :X=B
140 :GOSUB900
145 :Q=F
155 :Z=P-Q
160 :U=B*P-A*Q
165 :V=U/Z
170 :X=V
175 :GOSUB 900
180 :IF P*F >0GOTO 205
185 :IFB-V<E GOTO 221
190 :B=V
195 :N=N+1
200 :GOTO120
205 :IF V-A<E GOTO223
210 :A=V
215 :N=N+1
220 :GOTO120
221 :PRINT "ECC"
222 :GOTO225
223 :PRINT"DIF"
225 :PRINTE*(INT(V/E))
230 :PRINT N
250 :END
900 :F=X*(LOG(X))-LOG(100)
910 :RETURN
```



### 3.3. - Soluzione di una equazione per esplorazione di un intervallo

Nei paragrafi precedenti abbiamo presentato alcuni procedimenti per approssimare il valore della radice di una equazione:

$$(1) \quad f(x) = 0$$

che appartiene ad un intervallo:

$$(2) \quad A < x < B$$

nella ipotesi che la funzione soddisfi a certe ipotesi di regolarità e che prenda valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo, essendo in questa crescente oppure decrescente.

Pertanto, per assicurarsi che la funzione presenti questi caratteri, occorre una analisi preventiva, che può pure richiedere il tracciamento anche approssimato, del grafico della funzione.

Qualora ciò non sia possibile, è interessante poter esplorare metodicamente l'intervallo considerato, per poter dare valori approssimati di ogni radice eventuale che appartenga ad esso, oppure per poter garantire (sotto certe condizioni che vedremo) che non esistono radici. Il programma che esponiamo permette una esplorazione dell'intervallo (2), esplorazione che viene eseguita con il seguente metodo.

Si introducono gli estremi dell'intervallo nelle due memorie A e B (100,110); si introduce il passo iniziale  $10^{-(M)}$  (120,190) e l'ordine di approssimazione finale che si vuole ottenere  $10^{-(N)}$  (con  $N > M$ ) (130).

1) Il programma esplora l'intervallo a partire da A con il passo iniziale assegnato, calcolando  $F(A)$  (170) ed  $F(A+D)$  (220) e confrontando i segni dei risultati (240). Se incontra un cambiamento di segno approssima la radice per difetto, nell'ordine di approssimazione assegnato (cfr. infra sub ii). Se no, va avanti fino a che supera il II estremo B(205). Se questo avviene, diminuisce il passo (340) e ritorna a riesplorare l'intervallo con il nuovo passo. Il contatore R conta i cicli così fatti, fino a che è superato l'ordine di approssimazione stabilito da  $10^{-(N)}$ . Se sempre non trova radici (147) visualizza "NO ROOT". Naturalmente ciò è relativo all'ordine di approssimazione che è stato scelto; pertanto non si può escludere che possa essere stata saltata una coppia di radici, se la loro distanza è minore del passo minimo raggiunto.

ii) Se il programma incontra un cambiamento di segno della funzione (240, 250) tra A ed A+D, diminuisce il passo e torna ad esplorare l'intervallo con passo diminuito, fino a che ha raggiunto il valore di approssimazione stabilito  $10^k(-N)$  (150). Quando ciò avviene, visualizza il valore per difetto (300). Da notare che la memoria A ora non contiene più il dato iniziale, ma l'estremo sinistro dell'intervallo di cui si è verificato il cambiamento di segno. Il dato iniziale è stato portato nella memoria P(135).

iii) Ad un nuovo comando ENTER il programma ricomincia ad esplorare l'intervallo a destra della radice trovata, partendo dal suo valore per eccesso A+D(310) riprendendo il passo iniziale di massima lunghezza  $10^k(-M)$  e ricominciando a contare i cicli (320,323). Si ritorna quindi alla situazione di partenza con il nuovo intervallo, e l'operazione riprende dal caso i).

Programma in linguaggio BASIC (Sharp 1245 PC)

```
100: INPUT "A=";A
```

```
110: INPUT "B=";B
```

Si introducono gli estremi dell'intervallo nelle memorie A e B.

```
120: INPUT "M=";M
```

```
130: INPUT "N=";N
```

Si introducono il minimo e il massimo ordine di approssimazione nelle memorie M ed N. Si deve avere ovviamente  $N > M > 0$ .

```
135: P=A
```

Si introduce in P l'estremo sinistro, per memorizzarlo, perchè in seguito durante il calcolo l'estremo sinistro dell'intervallo viene spostato.

```
140: Q=M
```

```
145: R=M
```

Si memorizzano anche i valori del minimo ordine di approssimazione, per poter ripetere le esplorazioni con le stesse modalità quando si sia identificata una radice e si voglia proseguire.

```
147: IF R > N GOTO 360
```

Istruzione per poter visualizzare "NO ROOT" se l'esplorazione ripetuta ha dato risultati negativi.

```
150: IF M > N GOTO 300
```

Istruzione per arrestare il calcolo quando si sia conseguita la approssimazione sufficiente di una radice.

160: X=A

Si introduce in X l'estremo sinistro dell'intervallo per incominciare la esplorazione.

170: GOSUB 500

Calcolo del valore di F in A.

180: C=F

Introduzione del valore calcolato nella memoria C.

190: D=10A(-M)

Calcolo dell'incremento con il primo valore stabilito.

200: H=A+D

Calcolo del punto aumentato dell'incremento.

205: IF H B GOTO 360

Controlla che il punto incrementato non vada fuori dell'intervallo iniziale. Se ciò avviene, cfr. 340. Se ciò non avviene:

210: X=H

Introduzione del valore trovato in X per calcolare il valore della F, come segue:

220: GOSUB 500

230: E=F

Introduzione del valore trovato nella memoria E.

240: G=C\*E

Calcola il prodotto dei due valori per verificarne il segno, come segue.

250: IF G > 0 GOTO 280

Se non si è avuto cambiamento di segno, si procederà avanti, come da istruzione 280 (vedi).. Se si è avuto cambiamento di segno si diminuisce l'intervallo (vedi la istruzione seguente).

260: M=M+1

270: GOTO 150

Si ricomincia la esplorazione a sinistra della radice, con intervallo rimpicciolito. Se il segno non è cambiato, si sposta in avanti l'intervallo, come da istruzione seguente:

280: A=H

285: C=E

Il valore calcolato nell'estremo destro diventa quello calcolato nell'estremo sinistro del nuovo intervallo.

290: GOTO 200

Si incrementa l'ascissa dell'estremo sinistro e si ricalcola il valore di F nel nuovo estremo destro costruito con la 200. L'operazione si ripete fi

no a quando si raggiunge la condizione 205 o una radice.

300: PRINT A

Visualizza il valore per difetto della radice trovata.

Il nuovo comando ENTER porta l'estremo sinistro dell'intervallo nel valore approssimato per eccesso della radice.

310: P=A+D

320: M=Q

323: R=Q

325: A=P

Si riportano i contatori nello stato iniziale e si riporta l'estremo dell'intervallo nuovo nel valore calcolato in 310. E si ricomincia con il comando seguente.

330: GOTO 147

360: PRINT "NO ROOT"

Proviene da 147. Ovviamente questo risultato si ottiene anche quando si è superata l'ultima radice che è nell'intervallo stabilito, cioè a sinistra di B.

365: END.

SUBROUTINE per il calcolo del valore della funzione considerata.

In questo caso si considera la funzione:

$$F(X) = X^3 + X^2 + X - 4$$

a cui conduce la equazione del problema proposto da Cardano a Tartaglia.

500: F = X^3 + X^2 + X - 4

510: RETURN

Il programma potrebbe essere verificato con risultati interessanti per esempio sull'equazione "di Archimede", oppure sulla equazione:

$$(3) \quad x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

tra i valori  $-2$  e  $+2$ , equazione che traduce algebricamente il problema geometrico di inscrivere nella circonferenza il poligono regolare di 7 lati (ettagono regolare). Infatti si osserva che il numero 7 è il minimo intero naturale  $n$  per il quale il problema di iscrizione del poligono regolare di  $n$  lati nella circonferenza non risulta risolubile con riga e compasso.

L'impiego delle macchine permette di far vedere agli allievi come il giudizio di risolubilità o meno di un problema matematico è essenzialmente relativo agli strumenti che si intendono impiegare ed alle informazioni che si cercano. Infatti abbiamo detto (par. 2.5.) che, per il caso del poligono regolare di 7 lati, la metà del lato del triangolo regolare inscritto nella circonferenza fornisce una valutazione approssimata del raggio. Le radici della equazione (3) risultano essere in ordine crescente: -1.801937 , -0.445041 , 1.2469796 , valori che sono i doppi dei coseni degli angoli  $3(360^\circ/7)$ ,  $2(360^\circ/7)$ ,  $360^\circ/7$ .

#### OSSERVAZIONE

La prima scansione, dall'estremo sinistro alla prima radice della equazione (1), viene fatta con il primo (minimo) ordine di approssimazione, cioè con il passo più lungo. Quindi, se in questo intervallo esistono due radici della (1) la cui differenza è minore del passo suddetto, esse possono essere saltate. Per assicurarsi che questo non avvenga, occorre rifare la esplorazione, dall'estremo sinistro alla prima radice trovata, con passi sempre più piccoli.

#### Esempio

La equazione:

$$(4) \quad x^3 - 1.65 x^2 + 0.8774 x - 0.1518 = 0$$

ha le tre radici: 0.44 , 0.46 , 0.75.

Le prime due hanno la differenza 0.02. Pertanto se la procedura del programma inizia con l'input M=1 e quindi con passo 0.1 le prime due radici possono essere saltate dalla esplorazione iniziale.

#### 3.4. - Procedure particolari per certe equazioni di III grado

Per la soluzione della equazione di III grado possono essere adottate delle procedure che costituiscono utili esercizi di trigonometria, e che possono essere espletate con macchine "scientifiche", che permettono il calcolo delle funzioni trigonometriche.

E' noto che la equazione algebrica di III grado:

$$z^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

può essere ricondotta alla forma canonica:

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0$$

con la trasformazione:

$$z = x - b/3 .$$

Supporremo quindi che la equazione che si considera sia posta sotto la forma (1). D'altra parte ricordiamo che dalle formule di addizione delle funzioni trigonometriche si ha:

$$(2) \quad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a .$$

Pertanto la equazione data (1) può essere risolta con la operazione di trisezione dell'angolo  $3a$  se si riesce a ricondurla alla forma (2).

A tal fine poniamo:

$$(3) \quad x = ky$$

facendo la sostituzione e moltiplicando la equazione (1) per  $h$  si ottiene:

$$(4) \quad h k^3 y^3 + h k p y + h q = 0$$

La identificazione con (2) conduce al sistema di equazioni:

$$(5) \quad h k^3 = 4 ; \quad h p k = -3$$

con la ovvia condizione:

$$(6) \quad | h q | \leq 1$$

Dalle (5) si ottiene:

$$(7) \quad k^2/p = -4/3$$

ossia:

$$(8) \quad k = \sqrt{-4p/3}$$

da cui si ottiene una prima condizione necessaria per l'applicabilità del procedimento:

$$(9) \quad p < 0.$$

Ed ancora dalla seconda delle (5):

$$(10) \quad h = 3/p \sqrt{-4p/3} \quad ; \quad hq = -3q/p \sqrt{-4p/3}$$

Dalla condizione (6) si trae:

$$(11) \quad (hq)^2 \leq 1$$

e dalla seconda delle (10):

$$(12) \quad q^2/4 + p^3/27 \leq 0.$$

Viceversa si verifica, rifacendo a ritroso i passaggi, che se la (12) è soddisfatta, si possono determinare le costanti  $h$  e  $k$ , e quindi ricondurre la (1) alla forma (2). Da questi due valori si può trarre il valore di  $hq$ , che si identifica con  $\cos 3a$ ; pertanto è possibile determinare l'angolo  $3a$ , e di qui, dividendo per 3, si possono determinare i tre angoli che forniscono la trisezione dell'angolo  $3a$  e quindi, rifacendo in senso inverso i passaggi, danno le radici della (2) e di conseguenza della (1).

#### Esempio

Si consideri la equazione di Archimede:

$$(13) \quad x^3 - 3x + 1 = 0$$

già trattata con altri metodi (par. 3.1.).

In questo caso la (8) e la (10) danno:

$$(14) \quad k = 2 \quad ; \quad h = 1/2 \quad ; \quad hq = 1/2$$

Quindi, identificando con la (1) si ottiene:

$$(15) \quad \cos 3a = -1/2 \quad \text{da cui } 3a = 120^\circ$$

La trisezione dell'angolo  $3a$  dà i tre valori:  $40^\circ, 160^\circ, 280^\circ$ .

Il calcolo dei coseni e del doppio dei coseni dà le tre radici:

$$1.532088886 ; -1.87938524 ; 0.347296355$$

L'ultimo valore è ovviamente la soluzione positiva e minore di 1 della equazione di Archimede.

(Cfr. U. Cassina - Calcolo numerico - pag. 333 et sqq.).

#### Esempio 2

Si consideri il problema della costruzione del poligono regolare di 7 lati (cfr. par. precedente). Poniamo:

$$(16) \quad a = 360/7$$

ed anche:

$$(17) \quad x = \cos a$$

Le formule di addizione della trigonometria danno:

$$(18) \quad \cos 3a = 4x^3 - 3x ; \quad \cos 4a = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

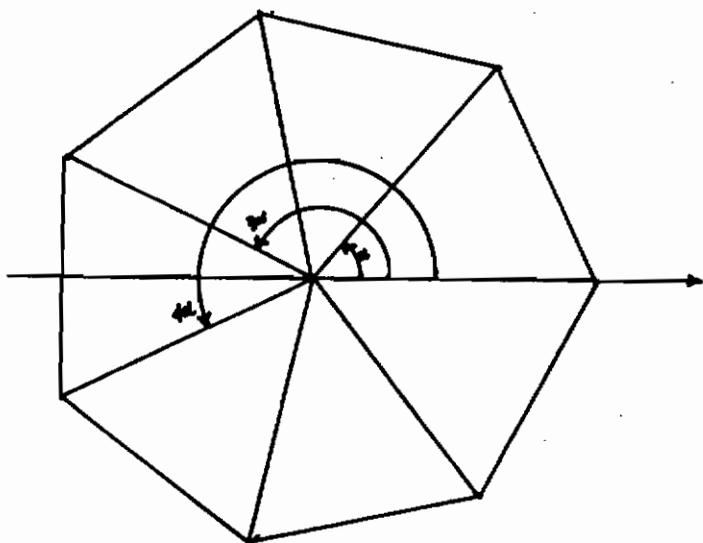
Se  $a$  ha il valore cercato, allora i due valori dati dalle formule precedenti coincidono (cfr. fig. allegata); si ottiene quindi la equazione:

$$(19) \quad 8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$$

Questa equazione ha la radice banale  $x = 1$ . Liberata la equazione da questa radice si ha:

$$(20) \quad 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$

Questa equazione ha certamente una radice positiva, come si accerta analizzando il comportamento della funzione razionale intera (polinomio) di  $x$  che è al primo membro della equazione stessa. Poniamo ora:



(21)

$$y = 2x$$

sostituendo nella (20) si ottiene:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

Ponendo:

$$y = z - 1/3$$

si ottiene:

$$27 z^3 - 63 z - 7 = 0$$

ed infine ponendo:

$$u = 3z$$

si arriva alla equazione:

$$u^3 - 21u - 7 = 0$$

alla quale si possono applicare le procedure esposte in questo paragrafo, verificando così la validità delle procedure esposte nel paragrafo precedente.

4 - Approssimazione di aree. Calcoli di integrali definiti con il metodo dei trapezi

Nel par. 1.4. del cap. VIII di questa II Parte abbiamo presentato una procedura per la valutazione approssimata dell'area del quarto di cerchio, al fine di trovare una valutazione approssimata della costante di Archimede.

Tale procedura è solo un caso particolare di una procedura più generale che viene adottata per cercare un valore approssimato di un'area.

La valutazione delle aree delle regioni piane limitate da spezzate poligonali non intrecciate (poligono, nel senso elementare del termine) è argomento di note trattazioni di Geometria elementare. Quando il confine della regione piana presa in considerazione è una curva (nel senso intuitivo del termine) la valutazione richiede anzitutto, dal punto di vista teorico, una analisi logica approfondita e precisa; dal punto di vista pratico, richiede l'applicazione di procedimenti infiniti di approssimazione, i quali permettono il miglioramento indefinito delle informazioni che si posseggono.

Il caso storicamente più importante di questi problemi è stato fornito dal problema della quadratura del cerchio, cioè della valutazione dell'area della regione piana racchiusa dalla circonferenza di raggio conosciuto.

Tratteremo qui il caso della valutazione dell'area della regione piana definita nel modo seguente: è data una funzione:

$$(1) \quad y = f(x)$$

in un intervallo:

$$(2) \quad A < x < B$$

Si supponga che la funzione (1) sia continua e positiva in tutto l'intervallo considerato; si abbia cioè:

(3)

$$f(x) > 0$$

per ogni  $x$  che soddisfa alle relazioni (2).

Si interpretino  $x, y$  come coordinate cartesiane ortogonali di punto in un piano; si tratta di dare una valutazione approssimata dell'area della regione compresa tra l'asse delle ascisse, la grafica della funzione (1) e le rette parallele all'asse delle ordinate e passanti per gli estremi dell'intervallo (2).

Il problema è risolto dal punto di vista teorico con il calcolo dell'integrale definito della funzione (1) nell'intervallo (2). Per la valutazione pratica dell'area della regione considerata si possono adottare varie procedure. Il programma che alleghiamo traduce quello che viene abitualmente chiamato "metodo dei trapezi"; con questo metodo la valutazione dell'area voluta si ottiene con la procedura seguente: si suddivide l'intervallo (2) in intervalli parziali, la cui misura costante viene indicata con  $P$  (passo). Si valuta la funzione (1) negli estremi di ogni intervallo parziale e si valuta l'area del trapezio che ha come base  $P$  e come ordinate estreme le ordinate della funzione negli estremi dell'intervallo parziale considerato.

Le istruzioni 100,110 introducono i dati (estremi dell'intervallo e passo); la subroutine 300,310 dà il calcolo della funzione presa in considerazione; nel caso del programma allegato si tratta della funzione  $f(x) = 1/x$ .

Il contatore  $N$  conta il numero delle operazioni effettuate e le visualizza (236), la memoria  $Y$  accumula i risultati dei calcoli dei valori della funzione e quindi visualizza l'area che è somma di quelle dei trapezi parziali (235). Le 140,225 tengono conto del fatto che ogni ordinata intermedia è contata due volte, e che soltanto la prima e l'ultima sono contate una volta sola nel calcolo delle aree dei trapezi.

I valori che si ottengono sono ovviamente per difetto nel caso in cui la grafica della funzione (1) rivolga la sua concavità verso il basso in tutto l'intervallo (2); sono per eccesso nel caso in cui la grafica stessa rivolga la sua concavità verso l'alto nello stesso intervallo. Nei casi in cui il comportamento della funzione vari nell'intervallo (2) è opportuno suddividere l'intervallo stesso in intervallo parziali, in ognuno dei quali il comportamento sia quello descritto, e permetta quindi di valutare il segno dell'errore che si commette.

Programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99 :REM:QUAD3=QUADRATURA(FORMULE DI..)
100 :INPUT"A=";A
105 :INPUT"B=";B:ESTREMI INTV,A<B
110 :INPUT"P=";P :PASSO
115 :X=A :PARTENZA
120 :N=0
130 :GOSUB 300
140 :Y=F/2
150 :X=X+P
160 :IF X>B GOTO 215
170 :GOSUB 300
180 :Y=Y+F
200 :N=N+1
205 :GOTO150
215 :X=X-P
220 :GOSUB 300
225 :Y=Y-F/2
230 :BEEP
235 :PRINTY*P
236 :PRINTN
240 :END
300 :F=1/X
310 :RETURN
```

Esempi

Il programma è stato applicato nei casi delle funzioni seguenti, sempre nell'intervallo definito da  $A=1$ ,  $B=2$  e con passo  $P=0.01$ .

Si sono ottenuti i seguenti risultati:

- 1) Funzioni il cui grafico presenta la concavità rivolta verso il basso (approssimazione per difetto):

$$(4) \quad y = \sqrt{x}.$$

Area: 1.218950 con errore minore di  $2 \cdot 10^{-6}$

$$(5) \quad y = 1 - x^2/16$$

Area: 0.854165 con errore minore di  $2 \cdot 10^{-6}$ .

- 1) Funzioni il cui grafico presenta la concavità rivolta verso l'alto (approssimazione per eccesso):

$$(6) \quad y = 1 + x^2$$

Area: 3.33335 con errore minore di  $3 \cdot 10^{-5}$  per eccesso.

(7)

$$y = 1/x$$

Area: 0.69315 con errore minore di  $10^{-5}$  per eccesso.

E' superfluo osservare che anche le procedure presentate in questo pa ragrafo sono destinate a ribadire i concetti che abbiamo ripetutamente pre sentato: infatti i calcoli che si possono eseguire in questi casi non possono essere portati a termine a mano in tempi ragionevoli; invece l'impiego intelligente delle macchine permette di ottenere delle informazioni che difficilmente si potrebbero raggiungere altrimenti; occorre tuttavia sempre controllare l'ordine di approssimazione dei risultati, per evitare di conservare in questi delle cifre che non forniscono informazioni esatte.

PARTE III - Procedure non usuali

IX - Sistemi di equazioni lineari in modo classico

Qual è il geometra che s'affige  
per misurar lo cerchio; e non ritrova  
pensando, quel principio ond'elli indige;  
tal era io .....

(Dante Alighieri - La Divina Commedia - Par. XXXIII, 133)

1. - Le considerazioni che abbiamo svolto nei capitoli precedenti possono essere applicate a molti argomenti dei programmi di Matematica delle scuole dell'ordine superiore.

A titolo di esempio, tratteremo qui di alcuni problemi riguardanti i sistemi di equazioni lineari. E' noto infatti che nei programmi delle scuole dell'ordine superiore è contemplata la risoluzione del sistema di due equazioni di primo grado in due incognite del tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} B1 * X + B2 * Y + B3 = 0 \\ B4 * X + B5 * Y + B6 = 0. \end{cases}$$

E' nota anche la possibilità di interpretare geometricamente il sistema di equazioni (1). Infatti, qualora si interpretino le incognite X ed Y come le coordinate cartesiane di un punto in un piano, il sistema di equazioni (1) traduce in forma algebrica, con le convenzioni della Geometria analitica, il problema geometrico di ricercare il punto di intersezione di due rette del piano, ognuna delle quali è rappresentata analiticamente da una delle equazioni del sistema stesso.

Dal punto di vista dell'Algebra, il problema non offre gravi difficoltà; ed invero, nei testi elementari vengono presentati vari procedimenti per la sua risoluzione. Tali procedimenti conducono in sostanza ad esprimere i valori X ed Y delle incognite del sistema (1) in funzione dei sei coefficienti: B1...B6; ed i valori di tali incognite sono espresso in funzione razionale dei coefficienti stessi, cioè con sole operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Il problema si presenta quindi come abbastanza semplice, ed in teoria quasi banale, quando si considerino i coefficienti come dei numeri esatti; esso incomincia invece a presentare qualche complicazione quan-

do i coefficienti del sistema (1) vengano considerati come dei valori approssimati di misure di determinate grandezze. Invero in questo caso ogni numero che indica un coefficiente va visto convenzionalmente come la indicazione di un intervallo, nell'interno del quale sta la misura esatta della grandezza considerata; per esempio, come abbiamo già visto, scrivendo

$$(2) \quad B1 = 2.34..$$

si intende di indicare convenzionalmente la coppia di disequaglianze:

$$(3) \quad 2.34 < B1 < 2.35$$

Alla luce di queste osservazioni, le informazioni date dalle formule risolutive del sistema (1) debbono essere valutate criticamente, perchè i valori forniti da tali formule dovrebbero essere accompagnati dalle indicazioni dei corrispondenti possibili errori; o - meglio - invece di un unico valore di ciascuna delle incognite, dato da tali formule, dovrebbero essere assegnati degli intervalli, nell'interno dei quali i valori possono trovarsi. Ogni ulteriore informazione, che pretenda di raggiungere una maggiore precisione, è invece da considerarsi come inattendibile e quindi fuorviante.

La costruzione degli intervalli ai quali appartiene ogni soluzione del sistema (1) nei casi considerati potrebbe essere fatta a partire dalle considerazioni svolte nel capitolo VIII; tuttavia il numero dei dati approssimati coinvolti (sei coefficienti, nel caso del sistema (1)) suggerisce la ricerca di altri procedimenti, che sarebbero notevolmente gravosi se si dovessero eseguire i calcoli manualmente, ma diventano di applicazione relativamente facile quando si disponga di un calcolatore programmabile, anche di modesta potenza.

Nel programma allegato, denominato LIN2, la valutazione dell'ordine di approssimazione delle soluzioni del sistema (1) viene fatta nel modo seguente: si passano in rassegna tutti i casi possibili per i sei coefficienti del sistema (1), prendendo per ciascuno di essi il valore per difetto e quello per eccesso. Tali casi sono ovviamente in numero di  $2^6=64$ . In ognuno di tali casi si applicano le formule elementari di risoluzione del sistema (1), e si visualizzano poi il massimo ed il minimo dei valori delle incognite così ottenuti.

La enumerazione di tutti i 64 casi possibili viene fatta nel modo seguente: si rappresentano i numeri da 1 a 64 in base 2, e si prendono le prime 6 cifre di tale rappresentazione, a partire da destra. Tali cifre sono - come è noto - 0 oppure 1. Esse vengono prese come coefficienti

ti degli incrementi che fanno passare ogni dato del problema (coefficiente del sistema (1)) dal valore per difetto a quello per eccesso.

Le istruzioni 100-105 introducono i dati; la 110 dà l'errore da cui i dati stessi sono affetti. Il contatore H1 dà i numeri da 1 a 64; la subroutine 950-1000 dà la rappresentazione in base 2 di tali numeri. Il contatore N dà il posto delle cifre della rappresentazione in base 2, a partire da destra. Le istruzioni 190-240 rimandano alle istruzioni 250-420, che costruiscono tutti i possibili valori, per difetto e per eccesso, dei dati. Le istruzioni 610-650 calcolano i valori delle incognite, con le formule elementari, per ciascuno dei casi considerati. Le 680 costruiscono l'estremo inferiore X5 e l'estremo superiore X6 dell'intervallo in cui cadono le soluzioni X. Le istruzioni 740-810 fanno una operazione analoga, costruendo l'estremo inferiore Y5 e l'estremo superiore Y6 dell'intervallo in cui cadono le soluzioni Y del sistema (1). Le 850-880 visualizzano tali intervalli.

L'applicazione del programma LIN2 mette in evidenza la validità delle osservazioni che sono state fatte più volte a proposito delle informazioni fornite dai calcoli. Si ha infatti - per esempio - che con i dati seguenti:

$B1 = 3.21$  ,  $B2 = 2.25$  ,  $B3 = 19.87$  ,  $B4 = 3.35$  ,  $B5 = 2.20$  ,  
 $B6 = 19.87$  ,  $E = 0.01$

si ottengono i risultati:

$X5 = 1.6576$  ,  $X6 = 2.4932$  ,  $Y5 = 5.2353$  ,  $Y6 = 6.4661$ .

Il calcolatore fornisce molte cifre decimali, oltre a quelle che sono state riportate qui sopra. E' ovviamente inutile riportarle, perchè già quelle che abbiamo scritto mettono in evidenza la inutilità di questa operazione.

Infatti una breve osservazione dei risultati permette di concludere che, in questo caso, la incertezza sulla seconda cifra decimale nei dati porta alla incertezza sulla cifra delle unità nei risultati.

Pertanto, quando i dati fossero dei numeri che traducono delle misure di grandezze concrete, le sole informazioni che è lecito dare come attendibili sono che il punto di intersezione delle due rette rappresentate dal sistema lineare (1) sta all'interno di un rettangolo, con i lati paralleli agli assi coordinati, costituito dai punti le cui coordinate massime e minime sono date dai risultati riportati.

LIN2, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

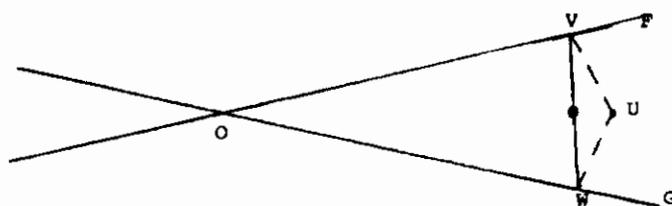
```
99 :REM.LIN2-SISTEMI LINEARI 2*2 CON INTV.
100 :INPUT"B1=";B1'COEFFICIENTI PRIMA EQUAZ.
101 :INPUT"B2=";B2
102 :INPUT"B3=";B3
103 :INPUT"B4=";B4'COEFFICIENTI SECONDA EQUAZ.
104 :INPUT"B5=";B5
105 :INPUT"B6=";B6
110 :INPUT"E=";E'ERRORE NEI DATI
120 :H1=1
130 :IF H1>64 GOTO 840
135 :M1=H1
140 :N=1
150 :IF N>6 GOTO 610
160 :GOSUB 950
190 :IF N=1 GOTO 250
200 :IF N=2 GOTO 280
210 :IF N=3 GOTO 310
220 :IF N=4 GOTO 340
230 :IF N=5 GOTO 370
240 :IF N=6 GOTO 400
250 :A1=B1 + E*M4
260 :N=N+1
270 :GOTO 150
280 :A2=B2 +E*M4
290 :N=N+1
300 :GOTO 150
310 :A3=B3+E*M4
320 :N=N+1
330 :GOTO 150
340 :A4=B4+E*M4
350 :N=N+1
360 :GOTO 150
370 :A5=B5+E*M4
380 :N=N+1
390 :GOTO 150
400 :A6=B6+E*M4
410 :N=N+1
420 :GOTO 150
610 :W=A1*A5-A2*A4
620 :U=A2*A6-A3*A5
630 :V=A3*A4-A1*A6
640 :Z1=U/W
650 :Z2=V/W
660 :X1=Z1
670 :IFH1>1 GOTO 700
680 :X5=X1
690 :X6=X1
700 :IF X5<X1 GOTO 720
710 :X5=X1
720 :IF X6>X1 GOTO 740
730 :X6=X1
740 :Y1=Z2
750 :IF H1>1 GOTO 780
760 :Y5=Y1
770 :Y6=Y1
780 :IF Y5<Y1 GOTO 800
790 :Y5=Y1
800 :IF Y6>Y1 GOTO 820
810 :Y6=Y1
820 :H1=H1+1
830 : GOTO 130
840 :BEEP
850 :PRINT "X5=";X5
860 :PRINT "X6=";X6
870 :PRINT "Y5=";Y5
880 :PRINT "Y6=";Y6
890 :END
950 :M2=M1/2
960 :M3=INT(M2)
970 :M4=M1-2*M3
980 :M5=M1-M4
990 :M6=M5/2
1000 :M1=M6
1010 :RETURN
```

2. - Nel paragrafo precedente abbiamo trattato dei problemi riguardanti la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari. Il programma ivi considerato traduce il procedimento classico che viene presentato nei trattati di Algebra elementare.

La possibilità di utilizzare dei mezzi elettronici di calcolo, anche non molto potenti, permette tuttavia di escogitare altre procedure per giungere alla soluzione dei problemi di sistemi di equazioni lineari. Tali procedure saranno illustrate nelle pagine che seguono, e la loro utilizzazione può costituire un utile esercizio sui concetti e sui metodi elementari della Geometria analitica; a tal fine presenteremo le procedure usando il linguaggio geometrico, interpretando il problema di ricerca delle soluzioni di un sistema di due equazioni lineari in due incognite come la traduzione analitica del problema geometrico di ricerca del punto di intersezione di due rette.

Indichiamo qui con F e G tali rette, e supponiamo che le equazioni lineari che le rappresentano siano le seguenti:

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 * X_1 + A_2 * X_2 + A_3 = 0 \\ A_1 * X_1 + B_2 * X_2 + B_3 = 0. \end{cases}$$



Si indichi ora con O il punto cercato di intersezione delle due rette; ovviamente le sue coordinate renderanno nulli i primi membri delle equazioni (1).

Non vi è pericolo di confusione se si indicano tali primi membri con i nomi F e G rispettivamente, ponendo cioè

$$(2) \quad \begin{cases} F = A_1 * X_1 + A_2 * X_2 + A_3 \\ G = B_1 * X_1 + B_2 * X_2 + B_3. \end{cases}$$

Indichiamo ora con K la funzione delle due variabili  $X_1$  ed  $X_2$ , data dalla somma dei valori assoluti dei due polinomi F e G; poniamo cioè:

$$(3) \quad K = \text{ABS}(F) + \text{ABS}(G).$$

Ovviamente la funzione  $K$  è ovunque non negativa e la condizione ne cessaria e sufficiente perchè si abbia:

$$(4) \quad K = 0$$

è che le variabili  $X_1$  ed  $X_2$  siano le coordinate del punto  $O$  di intersezione delle due rette.

Si consideri ora un punto  $U$  del piano, avente coordinate  $(U_1, U_2)$ ; ovviamente se il punto  $U$  che si è scelto coincide con il punto  $O$  che si cerca, le sue coordinate renderanno nulli i primi membri delle equazioni (1), e quindi renderanno nulla anche la funzione  $K$ . Se questo non avviene, si mandino da  $U$  le perpendicolari alle due rette  $F$  e  $G$ , e si indichino rispettivamente con  $V$  e  $W$  i due piedi di tali perpendicolari. Immediate considerazioni di Geometria elementare portano a concludere che ognuno dei due punti  $V$  e  $W$ , è più vicino ad  $O$  del punto  $U$  dal quale sono state calate le perpendicolari; è pure facile concludere che anche il punto medio del segmento avente per estremi  $V$  e  $W$  ha la stessa proprietà; pertanto le coordinate di tale punto medio daranno una valutazione migliore delle coordinate del punto  $O$  di quanto non siano le coordinate del punto di partenza  $U$ . Si dimostra quindi facilmente che il valore di  $K$ , calcolato in corrispondenza delle coordinate del punto medio ora trovato è minore del valore calcolato in corrispondenza al punto di partenza  $U$ .

E' chiaro che, mentre il punto medio trovato si avvicina al punto  $O$  cercato, il valore della funzione  $K$  si avvicina allo zero.

Di conseguenza la valutazione della approssimazione delle coordinate del punto medio trovato alle coordinate del punto  $O$  cercato potrà essere data dalla valutazione del valore della funzione  $K$ . E' chiaro che, se tale valore è stimato troppo alto ai fini della soluzione di un determinato problema, il procedimento può essere ripetuto scegliendo il punto medio trovato come nuovo punto  $U$ .

Si può quindi programmare un procedimento di approssimazioni successive, che conduce a trovare dei valori tanto vicini quanto si vuole ai valori delle coordinate del punto cercato  $O$ .

Il programma allegato, chiamato SNF4 traduce le considerazioni geometriche svolte finora.

In esso la subroutine 900, 910, 920 è destinata a calcolare il va-

lore della funzione K; il valore Z, calcolato dalla istruzione 400, come somma dei valori assoluti dei coefficienti A1, A2, B1, B2, ha l'ufficio di una specie di coefficiente di normalizzazione: infatti può avvenire che valori troppo grandi dei coefficienti ora nominati rendano molto lungo il procedimento che conduce ad abbassare il valore di K fino al di sotto del limite stabilito con la istruzione 220. Allo stesso scopo è diretta la introduzione del valore intero M con la istruzione 230, e la utilizzazione del contatore N, con le istruzioni 405, 460, 560, per fermare le procedure quando il numero dei cicli superi il limite M stabilito.

Le istruzioni 260...360 calcolano i coseni direttori delle perpendicolari calate da U alle due rette; le istruzioni 470...500 calcolano le coordinate dei piedi di tali perpendicolari; le 510, 520 calcolano le coordinate del punto medio di questi due punti. La 540 ferma il procedimento quando la approssimazione ottenuta è soddisfacente; le 580, 590 visualizzano le sole cifre delle coordinate che hanno significato, in relazione all'ordine di approssimazione stabilito.

Il procedimento che è stato esposto nel suo significato geometrico in relazione ad un sistema di due equazioni lineari, può essere applicato anche alla soluzione di un sistema di un numero qualunque di equazioni di tale tipo. Ovviamente in questo caso manca la possibilità delle interpretazione geometrica intuitiva, ma gli aspetti formali della procedura rimangono inalterati.

Il programma allegato, denominato FUORI è relativo ad un sistema di 4 equazioni lineari. Si può osservare che in questo caso le formule tradizionali conducono a calcoli molto lunghi e complicati: infatti nel caso in esame l'applicazione delle formule basate sul metodo di Cramer conduce al calcolo di 5 determinanti di matrici quadrate di ordine 4; ed il calcolo del valore numerico di ognuna di queste matrici conduce a calcolare, per ciascuna di esse, 24 prodotti di 4 fattori ciascuno, ed a sommare i prodotti stessi.

E' abbastanza spontaneo pensare che, quando si parta da valori approssimati dei coefficienti, risulti molto difficile valutare gli errori che si accumulano con tale procedimento, e quindi risulti molto difficile dare una valutazione critica delle informazioni che si ottengono con tali calcoli, anche se essi traducono procedimenti teorici assolutamente perfetti.

Pertanto, in questo caso ed in molti altri analoghi, ~~possiamo~~ possiamo che la utilizzazione di procedimenti diversi da quelli abituali e tradizionali possa condurre più sicuramente allo scopo di avere informazioni attendibili, e di valutare i margini di errore dei risultati.

a) SNF4, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```

100 : INPUT "A1="; A1 'REM "SNF4.DO"
110 : INPUT "A2="; A2 'REM:GLI A eB SONO COEFF.
120 : INPUT "A3="; A3
150 : INPUT "B1="; B1
160 : INPUT "B2="; B2
170 : INPUT "B3="; B3
200 : INPUT "X1="; X1 'REM :GLI X DATI INIZ.
210 : INPUT "X2="; X2
220 : INPUT "E="; E 'REM :ERRORE AMMESSO
230 : INPUT "M="; M 'REM:N. MAX DI CICLI
250 : SA=A1^2+A2^2
260 : SB=B1^2+B2^2
300 : P1=A1/SA 'REM: COS DIRET.
310 : P2=A2/SA
350 : Q1=B1/SB
360 : Q2=B2/SB
400 : Z=ABS(A1)+ABS(A2)+ABS(B1)+ABS(B2)
401 : L=1/Z
405 : N=0
410 : U1=X1
411 : U2=X2
430 : GOSUB 900
450 : IF J<EGOTO580
460 : IF N>M GOTO 600
470 : V1=U1-P1*F
480 : V2=U2-P2*F
490 : W1=U1-Q1*G
500 : W2=U2-Q2*G
510 : X1=(V1+W1)/2
520 : X2=(V2+W2)/2
530 : GOSUB 900
540 : IF J<E GOTO580
550 : U1=X1
551 : U2=X2
560 : N=N+1
570 : GOTO 460
580 : PRINT E*(INT(X1/E))
590 : PRINT E*(INT(X2/E))
595 : PRINTN
600 : PRINT "END"
610 : END
900 : F=A1*X1+A2*X2+A3 'REM: SUBR. DELLE EQ.
910 : G=B1*X1+B2*X2+B3
920 : K=ABS(F)+ABS(G)
930 : J=K*L
940 : RETURN

```

b) FOUR1, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
100 : INPUT "A1="; A1 'FOUR1=4 EQUAZ.
101 : INPUT "A2="; A2 'COEFF.
102 : INPUT "A3="; A3
104 : INPUT "A4="; A4
105 : INPUT "A5="; A5
110 : INPUT "B1="; B1
111 : INPUT "B2="; B2
112 : INPUT "B3="; B3
113 : INPUT "B4="; B4
114 : INPUT "B5="; B5
120 : INPUT "C1="; C1
121 : INPUT "C2="; C2
122 : INPUT "C3="; C3
123 : INPUT "C4="; C4
124 : INPUT "C5="; C5
130 : INPUT "D1="; D1
131 : INPUT "D2="; D2
132 : INPUT "D3="; D3
133 : INPUT "D4="; D4
134 : INPUT "D5="; D5
140 : INPUT "X1="; X1
141 : INPUT "X2="; X2 'DATI INIZIALI
142 : INPUT "X3="; X3
143 : INPUT "X4="; X4
150 : INPUT "E="; E 'ERRORE AMMESSO
160 : INPUT "M="; M 'NUMERO MAX. DI CICLI
200 : ZA=A1^2+A2^2+A3^2+A4^2
201 : ZB=B1^2+B2^2+B3^2+B4^2
202 : ZC=C1^2+C2^2+C3^2+C4^2
203 : ZD=D1^2+D2^2+D3^2+D4^2
220 : P1=A1/ZA 'COS. DIRETTORI
221 : P2=A2/ZA
222 : P3=A3/ZA
223 : P4=A4/ZA
230 : Q1=B1/ZB
231 : Q2=B2/ZB
232 : Q3=B3/ZB
233 : Q4=B4/ZB
240 : R1=C1/ZC
241 : R2=C2/ZC
242 : R3=C3/ZC
243 : R4=C4/ZC
250 : S1=D1/ZD
251 : S2=D2/ZD
252 : S3=D3/ZD
253 : S4=D4/ZD
270 : LA=ABS (A1) +ABS (A2) +ABS (A3) +ABS (A4)
271 : LB=ABS (B1) +ABS (B2) +ABS (B3) +ABS (B4)
272 : LC=ABS (C1) +ABS (C2) +ABS (C3) +ABS (C4)
273 : LD=ABS (D1) +ABS (D2) +ABS (D3) +ABS (D4)
274 : HS=LA+LB+LC+LD
280 : LS=1/HS
```

```

300 :N=0
310 :O1=X1
311 :O2=X2
312 :O3=X3
313 :O4=X4
320 :GOSUB 900
325 :IFJ<E GOTO420
326 :IFN>M GOTO440
330 :U1=O1-P1*FA'PIEDI DELLE PERPEND.
331 :U2=O2-P2*FA
332 :U3=O3-P3*FA
333 :U4=O4-P4*FA
340 :V1=O1-Q1*FB
341 :V2=O2-Q2*FB
342 :V3=O3-Q3*FB
343 :V4=O4-Q4*FB
350 :W1=O1-R1*FC
351 :W2=O2-R2*FC
352 :W3=O3-R3*FC
353 :W4=O4-R4*FC
360 :T1=O1-S1*FD
361 :T2=O2-S2*FD
362 :T3=O3-S3*FD
363 :T4=O4-S4*FD
370 :X1=(U1+V1+W1+T1)/4'BARICENTRI DEI PIEDI DELLE PERENDICOL.
371 :X2=(U2+V2+W2+T2)/4
372 :X3=(U3+V3+W3+T3)/4
373 :X4=(U4+V4+W4+T4)/4
380 :GOSUB 900
390 :IF J<E GOTO 420
400 :O1=X1
401 :O2=X2
402 :O3=X3
403 :O4=X4
405 :N=N+1
410 :GOTO320
420 :PRINT E*(INT(X1/E))
421 :PRINT E*(INT(X2/E))
422 :PRINT E*(INT(X3/E))
423 :PRINT E*(INT(X4/E))
430 :PRINTN
440 :PRINT "END" 'CASO DI TROPPI CICLI
450 :END
900 :FA=A1*X1+A2*X2+A3*X3+A4*X4+A5'EQUAZIONI LINEARI
910 :FB=B1*X1+B2*X2+B3*X3+B4*X4+B5
920 :FC=C1*X1+C2*X2+C3*X3+C4*X4+C5
930 :FD=D1*X1+D2*X2+D3*X3+D4*X4+D5
940 :K=ABS(FA)+ABS(FB)+ABS(FC)+ABS(FD)
950 :J=K*LS
960 :RETURN

```

## X - Utilizzazione di METODI MONTECARLO

1. - Nei capitoli precedenti abbiamo più volte eseguito dei calcoli avvertendo che concettualmente essi sono molto semplici, ma che, di fatto, essi sono praticamente inaseguibili, perchè richiederebbero troppo tempo e troppa fatica.

In questo capitolo del nostro scritto daremo altri esempi di utilizzazione di macchine calcolatrici, con procedure che sarebbero praticamente non applicabili manualmente, perchè richiederebbero troppo tempo, ma che sono eseguibili con opportuni calcolatori; esse possono venire utilizzate per ottenere delle informazioni, quando manchino altre procedure per risolvere i problemi che interessano.

Tra le procedure più interessanti, che non sono applicabili con calcoli manuali, sono quelle che vengono abitualmente richiamate con il termine di "METODI MONTECARLO". Questo nome richiama una località molto nota come sede di una casa da gioco, cioè di uno stabilimento che viene considerato come un esemplare di bisca, sede di scommesse. Come è noto, viene abitualmente chiamato "scommessa" un contratto aleatorio, cioè un contratto il cui esito dipende dall'avverarsi oppure no di un evento che non è prevedibile con mezzi abituali.

Abitualmente vengono chiamati "aleatori" degli eventi che sono consequenze di certi comportamenti umani (per esempio esperimenti) i cui risultati non sono prevedibili con certezza: esempio tipico sono l'apparire di una determinata faccia di un dado o di una moneta, lanciati senza particolari precauzioni; oppure la estrazione di un determinato numero al gioco del Lotto, o la comparsa di un determinato numero o un determinato colore alla "roulette".

Esperimenti cosiffatti, ed altri numerosissimi che sono stati escogitati, danno luogo a contratti ed impegni economici che pongono i contraenti in condizioni di incertezza, conseguente alla pratica impossibilità di avere informazioni complete sugli esiti dei comportamenti concreti.

La teoria di questi contratti viene chiamata "CALCOLO DELLE PROBA-BILITA'", e costituisce un ramo della Matematica il quale mira a dare le regole per un comportamento che realizza la massima razionalità compatibile con le informazioni incomplete che i soggetti posseggono.

Questo ramo della Matematica è stato applicato anche per calcoli

teorici; il primo esempio di calcoli cosiffatti è costituito dal celebre "PROBLEMA DELL'AGO" di Buffon (Georges-Louis Leclerc, Conte di, 1707-1788), che tratteremo nel paragrafo 3.

2. - In molte macchine calcolatrici, anche tascabili, è possibile utilizzare delle istruzioni le quali forniscono dei numeri che vengono detti "casuali" o anche "aleatori"; per esempio, con adeguate istruzioni, la macchina può fornire un numero positivo compreso tra zero ed 1 e con tre o più cifre decimali, il quale varia di volta in volta con una legge talmente complicata che il numero stesso può essere considerato come casuale per un utilizzatore normale. Non interessa qui decidere la questione se tali numeri possano a rigore essere considerati del tutto casuali; basta che essi siano distribuiti in modo soddisfacentemente uniforme in certi intervalli che interessano l'utilizzatore; per esempio, se si tratta di numeri i quali sono compresi tra zero ed 1, interessa che, quando ne siano stati generati molti, il numero di quelli che appartengono ad un determinato intervallo parziale sia proporzionale alla lunghezza dell'intervallo stesso.

Gli espedienti per generare delle sequenze di numeri che abbiano queste proprietà formano oggetto di studi che non possiamo analizzare qui; ci limitiamo ad osservare che le proprietà che abbiamo ricordato possono essere utilizzate e sfruttate per eseguire dei calcoli e delle valutazioni che condurrebbero a risolvere problemi troppo complicati o addirittura difficilmente risolvibili se affrontati con i metodi tradizionali della Matematica. Questi procedimenti sono applicabili quando si disponga di calcolatori programmabili (anche piccoli), perchè soltanto in questi casi sono eseguibili le operazioni ed i calcoli parziali numerosissimi che si debbono affrontare.

Si hanno esempi interessanti di applicazione di procedimenti cosiffatti in alcuni problemi, quando sia poco comodo utilizzare i procedimenti abituali dell'Analisi matematica; per esempio in certi problemi che richiedono valutazioni di aree di figure piane o volumi di solidi, oppure quando i procedimenti abituali richiedano tante manipolazioni dei dati da provocare degli errori finali quasi certamente maggiori di quelli che si incontrano applicando i procedimenti Montecarlo.

Vedremo nel seguito delle applicazioni di questi procedimenti nei

vari casi.

A titolo di esempio, utilizziamo il procedimento MONTECARLO per la valutazione della costante di Archimede pigreca, che abbiamo già cercato di valutare in vari modi. In questo caso ci riallacciamo alla procedura esposta nel paragrafo 1. del capitolo VIII. La differenza tra la procedura ricordata e quella che esporremo qui sta nel fatto che la valutazione approssimata dell'area viene qui eseguita facendo costruire al calcolatore molti numeri casuali, compresi tra 0 (zero) ed 1; tali numeri, a coppie, vengono interpretati come coordinate di punti interni al quadrato di lato unitario. Se le scelte sono abbastanza numerose, si può ragionevolmente presumere che i punti siano uniformemente distribuiti nell'interno del quadrato; il che significa che il numero di punti interni ad una determinata figura contenuta nel quadrato è proporzionale all'area della figura stessa. Se la figura è il quarto di cerchio di raggio unitario, avente il centro in un vertice del quadrato, si ottiene ovviamente una valutazione dell'area di questo quarto di cerchio e quindi una valutazione della costante di Archimede.

Nel programma accluso la istruzione 100 introduce lo INPUT S, che stabilisce il numero di punti da scegliere a caso nel quadrato di lato unitario: le istruzioni 105, 106 introducono il computo del numero di punti scelto e rispettivamente del numero di punti che cadono dentro il quarto di cerchio, a norma del confronto dato dalla 150. La istruzione 110 fa terminare il procedimento e visualizzare il risultato quando il numero dei punti scelti supera quello stabilito S; le 120, 130 fanno scegliere a caso al calcolatore due numeri compresi tra 0 (zero) ed 1. Tali numeri sono interpretati come coordinate cartesiane di punto, e la istruzione 140 calcola il quadrato della loro distanza dall'origine, che è un vertice del quadrato. Se tale distanza è minore di 1, cioè se il punto è interno, il caso viene computato dal contatore M, e si ricomincia il procedimento (Istr. 180); altrimenti si fa un'altra scelta; in ogni caso la scelta viene computata dal contatore N (Istr. 170, 190). Alla fine del procedimento si fa il rapporto tra il numero di scelte favorevoli, nel senso che danno luogo a punti interni al quarto di cerchio, ed il numero N delle scelte eseguite; tale rapporto, se S è abbastanza alto, risulta sensibilmente proporzionale al rapporto tra l'area del quarto di cerchio e quella del quadrato; quindi, tale rapporto, moltiplicato per 4, dà una valutazione relativamente soddisfacente di pi-

greca.

Per esempio, per  $S = 10000$  si ottiene 3.1528847115287; per  $S = 20000$  si ottiene 3.138615162265.

Come si può constatare dal confronto con le altre valutazioni, gli errori sono notevoli. Inoltre il procedimento risulta abbastanza lento; ma il suo aspetto più negativo è dato dal fatto che in questo caso non è possibile, con un solo calcolo, stabilire l'ordine di grandezza né il segno dell'errore che si commette: invero, per avere informazioni più attendibili, occorrerebbe ripetere molte volte lo stesso calcolo e poi adottare metodi statistici per elaborare le informazioni (tutte diverse tra loro) che si ottengono di volta in volta. Pertanto la efficacia di questi metodi deve essere accuratamente valutata in relazione ai problemi che si vogliono risolvere.

Calcolo di  $\pi$  con METODO MONTECARLO, programma in linguaggio BASIC  
(Olivetti M10)

```
99:REM.MC1.MONTECARLO 1.CALCOLO DI PI GRECO CON METODO MONTECARLO
100:INPUT "S=";S
105:N=0
106:M=0
110:IF N>S GOTO 210
120:X1=RND(1)
130:X2=RND(1)
140:F=X1^2+X2^2
150:IF F>1 GOTO 190
160:M=M+1
170:N=N+1
180:GOTO 110
190:N=N+1
200:GOTO 110
210:P=4*M/N
220:BEEP
230:PRINT P
240:END
```

3. - Le considerazioni sulla esperienza progettata da Buffon (cfr. paragrafo 1.) costituiscono uno dei primi esempi di applicazione dei concetti fondamentali del calcolo delle probabilità a problemi di Geometria; prendeva così origine un ramo del calcolo delle probabilità che viene spesso indicato come teoria delle probabilità geometriche.

Come è noto, il problema di Buffon potrebbe essere presentato nel modo seguente: è dato un pavimento, sul quale sono tracciate delle rette parallele, tutte alla medesima distanza l'una dall'altra.

Si lancia sul pavimento un ago, avente lunghezza uguale alla distanza tra due delle rette che rigano il pavimento. Si tratta di valutare la probabilità dell'evento che si verifica quando l'ago cade sul pavimento in modo da intersecare una delle linee che rigano il pavimento stesso.

La valutazione di tale probabilità costituisce un esempio di facile applicazione di concetti elementari di Trigonometria, beninteso quando si accettino certi presupposti di calcolo delle probabilità che non intendiamo discutere qui, e che comunque sono stati già analizzati, almeno in parte, nelle pagine precedenti.

Senza lesione della generalità, possiamo scegliere come unità di lunghezza dei segmenti la metà della distanza tra due rette parallele. Pertanto l'ago avrà lunghezza uguale al doppio della unità di misura dei segmenti.

Ai fini che ci interessano, la posizione dell'ago che cade sul pavimento è caratterizzata da due parametri: la distanza  $X_2$  del punto medio dell'ago dalla retta più vicina, e l'angolo  $X_1$  che l'ago caduto forma con le rette del pavimento (cfr. la figura allegata). Facili considerazioni di Trigonometria elementare conducono a concludere che l'ago interseca una retta allora ed allora soltanto che si abbia:

$$(1) \quad X_2 < \sin(X_1) .$$

Si può allora progettare un programma che riproduca abbastanza fedelmente le circostanze dell'esperimento materiale descritto.

La figura allegata illustra geometricamente la relazione tra i parametri  $X_1$  ed  $X_2$  che abbiamo considerato. Precisamente, interpretando  $X_1$  ed  $X_2$  come coordinate cartesiane di punto in un piano, i punti che danno luogo all'incontro dell'ago con una retta sono quelli al di sotto

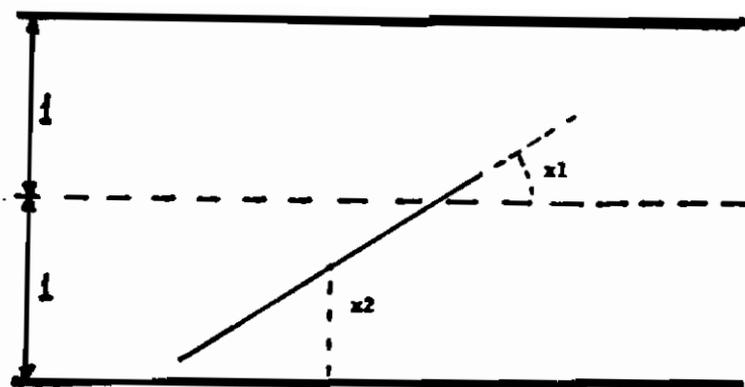


Fig. 1

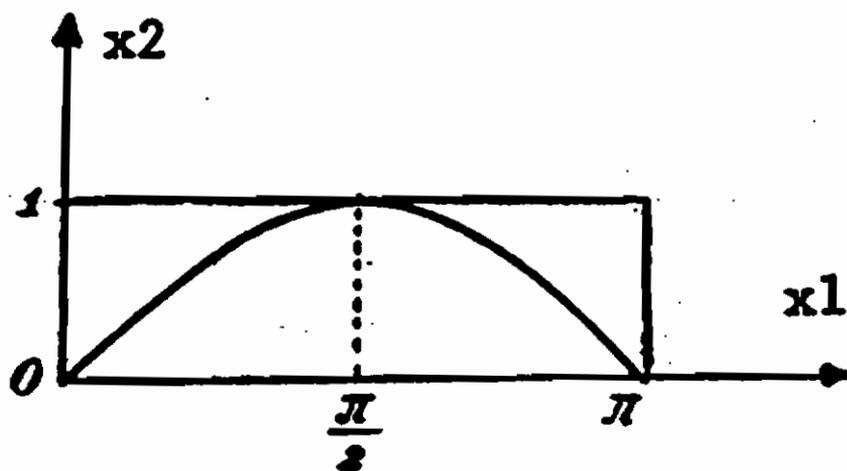


Fig. 2

dell'arco di seno, corrispondente ai valori di  $X_1$  tra zero e  $\pi$ . Se immaginiamo di scegliere "a caso" dei punti nel rettangolo raffigurato, potremmo considerare come una valutazione attendibile della probabilità che cerchiamo il rapporto tra il numero di punti casuali interni all'arco di seno rispetto al numero totale di punti che cadono nel rettangolo di altezza 1, limitato dalle ascisse zero e  $\pi$ .

Supponendo che i punti siano abbastanza numerosi e distribuiti in modo sufficientemente uniforme, il rapporto che si cerca risulta prossimo al rapporto tra le aree delle figure piane considerate. Considerazioni di carattere non elementare permettono di valutare l'area della figura limitata dall'arco di seno, area che vale 2.

D'altra parte l'area del rettangolo di altezza 1 e di base  $\pi$  vale ovviamente questo numero.

Il programma allegato, denominato BUF1, traduce le considerazioni svolte fin qui.

Precisamente la istruzione 100 introduce il numero dei punti che si vogliono scegliere, la 120 fa arrestare i calcoli e visualizzare i risultati quando il numero dei punti scelti supera quello stabilito. Le istruzioni 110, 115 introducono i valori iniziali dei numeri dei punti scelti (N) e quello dei punti che cadono sotto l'arco di seno (Q). La istruzione 130 fa scegliere a caso un numero  $X_1$  tra zero e 4. Ciò porta alla necessità di scartare quelle scelte che danno valori superiori a  $\pi$ ; ciò si fa con la istruzione 140, che fa ripetere la scelta quando il valore trovato supera il limite, senza tenerne conto nella contabilità generale delle scelte.

La istruzione 160 distingue tra i punti che cadono sotto l'arco di seno e quelli che cadono nel rettangolo, facendoli contabilizzare in modo diverso. Infine la 250 visualizza il risultato.

Ovviamente questo può essere diverso da prova a prova, e dipende essenzialmente dai programmi per la generazione dei numeri casuali che sono inseriti nel calcolatore che si usa.

Per esempio, un esperimento ha dato, per  $M = 5000$  il valore  $R = 3.1589\dots$

Riteniamo quindi utile fare esplicitamente qualche osservazione a proposito di questo programma, e di altri analoghi che si potrebbero escogitare.

Osserviamo anzitutto che la utilizzazione di questo programma non

può in alcun caso essere considerata come sostitutiva dell'esperimento materiale fisico. Infatti in questo, ed in altri casi, il calcolatore può soltanto simulare ciò che avviene nella realtà sperimentale, ma questa simulazione è frutto di una schematizzazione e di una idealizzazione degli esperimenti: pertanto questi non potranno in alcun caso essere sostituiti dalla simulazione con il calcolatore.

In secondo luogo ricordiamo che questi esperimenti non possono essere considerati come sostitutivi dei ragionamenti teorici che portano al calcolo preciso di valori approssimati della costante di Archimede. Infatti la ripetizione dello stesso calcolo con lo stesso numero di punti può benissimo portare a valori diversi del rapporto cercato, il quale dipende - ripetiamo - anche, ed in modo determinante, dal programma interno di generazione dei numeri casuali.

Pertanto ciò che abbiamo esposto finora può essere considerato più come un utile esercizio di scrittura e di interpretazione di programmi che come un metodo efficace per valutare la costante di Archimede.

BUF1 Esperienza di Buffon, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99:REM:BUF1- ESPERIENZA DI BUFFON.
100:INPUT"M=";M'NUMERO DELLE PROVE
110:N=1
115:Q=1
120:IF N>M GOTO250
130:X1=4*RND(1)
140:IF SIN(X1)<0 GOTO 130
150:X2=RND(1)
160:IF X2< SIN(X1) GOTO 190
170:Q=Q+1
180:GOTO 120
190:Q=Q+1
200:N=N+1
210:GOTO 120
250:BEEP
251:R=2*Q/N
260:PRINT"R=";R
270:END
```

4. - Un altro esempio di problema di probabilità geometrica è quello che viene richiamato in vari modi e che noi qui chiameremo **PROBLEMA DELLO SPEZZAMENTO DEL BASTONE**, perchè sotto questa forma esso viene presentato anche nelle pubblicazioni di divulgazione. Esso viene formulato abitualmente nei seguenti termini: si spezza a caso un bastone in tre pezzi; valutare la probabilità che con tali pezzi si possa costruire un triangolo, del quale essi sono i lati.

E' facile osservare che questo enunciato è privo di senso, nonostante il fatto che per qualcuno esso possa apparire chiaro: infatti il problema non è risolvibile fino a quando non si precisa che cosa in intende dire con la espressione "spezzare a caso un bastone" o con altre espressioni analogamente indeterminate.

Uno dei (tanti) modi possibili per dare un senso preciso alla frase potrebbe essere il seguente: si immagini un bastone di lunghezza determinata; si segnino su di esso delle tacche di divisione, a distanze tutte uguali tra loro, e talmente fitte che sia "praticamente" indifferente la scelta di un punto di divisione nell'intervallo tra due tacche: per esempio, se il bastone è lungo 1 m, si segnino 10000 tacche, a distanza di 0.1 mm l'una dall'altra. Si introducano poi in un'urna 10000 palline, indistinguibili al tatto, segnate con i numeri da 1 a 10000; si estraggano due palline dall'urna e si faccia la divisione del bastone nei punti in cui sono le tacche corrispondenti ai due numeri estratti.

Per la valutazione teorica della probabilità si possono svolgere le seguenti considerazioni: si facciano costruire da un calcolatore due numeri casuali (nel senso spiegato nel paragrafo 2) che chiameremo  $X_1$  ed  $X_2$ , compresi tra 0 (zero) ed 1.

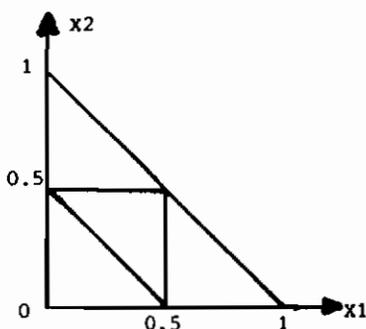
Questi due numeri saranno considerati come le lunghezze di due dei lati del triangolo incognito da costruire, il terzo lato avendo ovviamente la lunghezza:

$$(1) \quad x_3 = 1 - x_1 - x_2$$

E' noto dalla Geometria elementare che la condizione necessaria e sufficiente perchè i tre numeri:  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  possano essere le lunghezze dei tre lati di un triangolo è che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due.

Queste condizioni si traducono facilmente nelle limitazioni seguenti:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 < 0.5 ; \quad x_2 < 0.5 \\ x_1 + x_2 < 0.5 . \end{aligned}$$



Queste limitazioni ammettono una facile e semplice interpretazione geometrica: in un piano, si considerino due assi cartesiani ortogonali, e si indichino con  $x_1$  ed  $x_2$  le coordinate di un punto del piano rispetto a questi assi. I punti del piano le cui coordinate soddisfano alle relazioni (2), ed alla ovvia limitazione:

$$(3) \quad x_1 + x_2 < 1$$

stanno in un triangolo che ha i suoi vertici nei punti medi del triangolo avente come lati gli assi e la congiungente i punti unit  degli assi stessi.

Imponiamo ora ad un calcolatore di produrre dei numeri casuali tra zero ed 1, ed assumiamo i numeri cos  prodotti come coordinate  $x_1$  ed  $x_2$  di un punto nel nostro piano; se i numeri sono prodotti in modo indipendente l'uno dall'altro e se sono distribuiti in modo sufficientemente uniforme, quando le scelte siano abbastanza numerose, il numero dei punti che cade nell'interno del triangolo i cui punti rappresentano coppie di numeri soddisfacenti alle condizioni (2) sta al numero dei punti che cadono nell'intero triangolo come l'area del triangolo piccolo sta a quella del triangolo grande. Tale rapporto vale quindi 0.25.

Il programma allegato traduce le considerazioni che abbiamo svolto.

In esso S stabilisce il numero dei punti da scegliere nel triangolo, M dà il numero dei punti che cadono nel triangolo piccolo e che quindi corrispondono a soluzioni del problema. Le istruzioni 130, 131 fanno scegliere due numeri casuali tra 0 (zero) ed 1. La istruzione 140 verifica che la somma dei numeri casuali costruiti non superi 1; se questo avviene, la scelta non viene neppure contata, e se ne fa un'altra; altrimenti il punto viene contato, e si verifica poi se le condizioni (2) sono soddisfatte (Istr. 160, 170, 180); se ciò avviene, la scelta viene computata come favorevole dal contatore M. Quando si è raggiunto il numero stabilito di punti, si esegue il rapporto tra le scelte che risultano favorevoli e il numero totale di quelle eseguite.

Ovviamente tale rapporto dovrebbe avvicinarsi al valore teorico 0.25 al crescere del numero delle prove S. Si hanno spesso degli scostamenti, dovuti al fatto che, nei piccoli calcolatori, difficilmente i numeri casuali che vengono generati da programmi interni sono bene distribuiti; essi probabilmente si riproducono ciclicamente dopo un numero di prove che può anche sembrare grande, ma che risulta essere piccolo di fronte alle esigenze di una statistica precisa.

Un esempio di calcolo eseguito con il programma allegato per  $S = 10000$  dà  $P = 0.25207479\dots$

Spezzamento del bastone, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99:REM.MC2-SPEZZAMENTO DEL BASTONE
100:INPUT"S=";S
110:N=0
111:M=0
120:IF N>S GOTO 220
130:X1=RND(1)
131:X2=RND(1)
140:IF X1+X2 >1 GOTO 130
150:N=N+1
160:IF X1>0.5 GOTO120
170:IF X2>0.5 GOTO 120
180:IF X1+X2 <0.5 GOTO 120
190:M=M+1
200:GOTO 120
220:BEEP
230:R=M/N
240:PRINT R
250:END
```

5. - Nei precedenti paragrafi abbiamo visto la possibilità di utilizzare i programmi che generano numeri casuali, o meglio, numeri uniformemente distribuiti in un intervallo, per il calcolo di valori approssimati di aree di figure piane. Daremo qui alcuni esempi di altre utilizzazioni di questi programmi, per la risoluzione di certi problemi che abbiamo già affrontati nel capitolo IX e che possono essere considerati da altri punti di vista.

Una utilizzazione del tipo che abbiamo in vista si può avere per esempio per la soluzione di un sistema di equazioni; ci riferiamo alla interpretazione geometrica di questo problema che è stata esposta nel paragrafo 2. del capitolo IX, e utilizziamo le notazioni che sono state ivi introdotte.

Per la ricerca del valore minimo della funzione  $K$  che è stata definita con la (3) del paragrafo citato si può seguire la procedura esposta nelle righe seguenti.

Si consideri un punto  $U$  e si calcoli il valore della funzione  $K$  nel punto stesso. Si prenda poi a caso un punto vicino ad  $U$ ; a tale scopo si consideri un quadrato che ha il suo centro in  $U$ , ed ha come lato il valore  $K$  della funzione calcolato in  $U$ . Si calcoli il valore che la funzione  $K$  assume in un punto  $X$  scelto a caso nel quadrato considerato; quando tale valore è minore di quello assunto in  $U$ , si trasporti ivi il centro del quadrato e si ricominci l'esplorazione. Si faccia finire la procedura quando la funzione abbia assunto un valore giudicato sufficientemente piccolo in relazione al problema che si intende risolvere; ovviamente le coordinate del punto considerato, in questo caso, danno delle valutazioni approssimate delle coordinate del punto  $O$  che si cerca, e l'ordine di approssimazione è determinato dal valore  $E$ , stabilito come massimo per la funzione  $K$ .

Il programma PRW1 allegato traduce le considerazioni geometriche svolte finora. Precisamente: le istruzioni 100...150 danno i valori dei coefficienti delle due equazioni lineari considerate; il valore della funzione  $K$  è calcolato dalla subroutine 900...920; la istruzione 180 introduce un limite superiore del valore di  $K$ , le 190, 191 danno le coordinate di un punto  $U$  di partenza della procedura, la 200 dà un valore massimo per il numero dei calcoli che si ripetono, per evitare che il procedimento si prolunghi troppo a causa di eventuali errori.

La istruzione 250 calcola una specie di fattore di normalità della

coppia di equazioni, le 270, 271 introducono le coordinate del punto di partenza come valori delle variabili della funzione K, la 280 introduce il valore iniziale del contatore N, che ferma la procedura se il numero dei cicli è troppo alto, rispetto ad una stima approssimata iniziale. Le istruzioni 310, 311 danno il vertice iniziale del quadrato entro il quale viene fatta la esplorazione del punto scelto casualmente; le 320, 321 danno la scelta del punto stesso. La 330 fa calcolare il valore della funzione K nel punto, la 350 fa ripetere la scelta se il valore di K trovato non è inferiore a quello raggiunto in precedenza, le 360...380 trasportano il centro del quadrato nel punto trovato e fanno ricominciare il procedimento, qualora il valore di K nel punto trovato sia inferiore al precedente.

Le istruzioni 700...720 fanno visualizzare i valori delle coordinate che hanno senso, nell'ordine di approssimazione che è stato stabilito con la istruzione 180.

Il procedimento qui esposto può essere ovviamente generalizzato ad un numero qualsiasi di equazioni. E' chiaro infatti che questo non costituisce una condizione perentoria per la validità della procedura; è chiaro inoltre che questa può essere applicata anche nei casi in cui le equazioni che si considerano non sono lineari, ed addirittura non sono algebriche.

PRW1, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```

99:REM . PRW1 = PSEUDO RANDOM WALK
100: INPUT "A1=";A1 ' COEFFICIENTI DELLA PRIMA EQUAZIONE
110: INPUT "A2=";A2
120: INPUT "A3=";A3
130: INPUT "B1=";B1 ' COEFFICIENTI DELLA SECONDA EQUAZIONE
140: INPUT "B2=";B2
150: INPUT "B3=";B3
180: INPUT "E=";E 'ERRORE AMMESSO
190: INPUT "U1=";U1 ' PUNTO DI PARTENZA
191: INPUT "U2=";U2
200: INPUT "M=";M ' MASSIMO NUMERO DI CICLI
250: Z= ABS(A1)+ABS(A2)+ABS(B1)+ABS(B2)
260: L=1/Z
270: X1=U1
271: X2=U2
280: N=0
290: GOSUB 900
291: S=J

```

```

300: IF N>M GOTO 700
305: IF J<E GOTO 700
310: V1= U1 - 0.5*J
311: V2=U2-0.5*J
320: X1=V1+J*RND(1)
321: X2=V2+J*RND(1)
330: GOSUB 900
340: IF J<S GOTO 360
350: GOTO 320
360: U1=X1
361: U2=X2
370: S=J
375: N=N+1
380: GOTO 300
700: BEEP
710: PRINT E*(INT(X1/E))
711: PRINT E*(INT(X2/E))
720: PRINT N
730: END
900: F=A1*X1+A2*X2+A3'SUBROUTINE DELLE EQUAZIONI
910: G=B1*X1+B2*X2+B3
920: K=ABS(F)+ABS(G)
930: J=K*L
940: RETURN

```

6. - Il programma PRW1 esposto poco fa può essere migliorato, conservandone tuttavia sempre il significato geometrico. Tale modifica può essere conseguita come segue.

Abbiamo visto che il procedimento applicato porta sostanzialmente ad esplorare in modo casuale un quadrato avente il suo centro in un punto U scelto come punto di partenza; quando si trovi un punto X del quadrato nel quale la funzione K assume un valore minore di quello assunto in U, si trasporta in X il centro di un nuovo quadrato, e si ricomincia la esplorazione, a meno che il valore di K ottenuto non sia già sufficientemente piccolo per considerare le coordinate di X come delle approssimazioni sufficienti delle coordinate cercate, che fanno assumere a K il valore zero.

Orbene questa procedura può essere migliorata, cercando di tener conto in ogni passo del risultato del passo precedente; ciò si fa memorizzando i segni degli incrementi delle coordinate, nel passaggio dal punto U al punto X; scegliendo poi il nuovo punto U non al centro del nuovo quadrato, ma in modo che le sue distanze dai lati del nuovo quadrato stiano tra loro come 1 sta a 9; ciò nella ragionevole presunzione

di poter risparmiare un certo numero di esplorazioni del nuovo quadrato, evitando di cercare il nuovo punto X in direzioni (rispetto ad U) che presumibilmente non danno diminuzione del valore di K.

Il procedimento viene arrestato, come nel programma precedente, quando la funzione K assume un valore stimato abbastanza piccolo, ovviamente in relazione al problema considerato.

Le idee sopra esposte si sono dimostrate abbastanza valide, e la loro applicazione può anche portare quasi al dimezzamento del numero di cicli necessari per ottenere un valore soddisfacente della funzione K.

Il programma PRW2 traduce le idee esposte; esso consta di due fasi: una fase iniziale in cui, partendo da un punto iniziale U, si esplora con scelte casuali un quadrato che ha il suo centro in U. Tale fase è realizzata con le istruzioni 250...350, ovviamente dopo le istruzioni iniziali che introducono i coefficienti delle equazioni ed i parametri analoghi a quelli del programma PRW1.

Una volta trovato un primo punto X, le istruzioni 380, 381 calcolano i segni degli incrementi delle coordinate, nel passaggio da U ad X; le istruzioni 390...401 conducono alla scelta di un punto X nell'interno di un quadrato che non ha U come centro, ma è situato nella maniera descritta sopra. Ad ogni nuovo punto X che si incontra si riproduce il procedimento, il quale viene arrestato con modalità analoghe a quelle del programma PRW1.

PRW2, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99 :REM . PRW2 = PSEUDO RANDOM WALK
100 : INPUT "A1=";A1 ' COEFFICIENTI DELLA PRIMA EQUAZIONE
110 : INPUT "A2=";A2
120 : INPUT "A3=";A3
130 : INPUT "B1=";B1 ' COEFFICIENTI DELLA SECONDA EQUAZIONE
140 : INPUT "B2=";B2
150 : INPUT "B3=";B3
180 : INPUT "E=";E 'ERRORE AMMESSO
190 : INPUT "U1=";U1 ' PUNTO DI PARTENZA
191 : INPUT "U2=";U2
200 : INPUT "M=";M ' MASSIMO NUMERO DI CICLI
250 :Z= ABS(A1)+ABS(A2)+ABS(B1)+ABS(B2)
260 :L=1/2
270 :X1=U1
271 :X2=U2
280 :N=0
290 : GOSUB 900
```

```

291 :S=J
305 :IFJ<E GOTO 700
310 :V1= U1 - 0.5*J
311 :V2=U2-0.5*J
320 :X1=V1+J*RND(1)
321 :X2=V2+J*RND(1)
330 :GOSUB 900
340 :IF J<S GOTO 360
350 : GOTO 320
360 :IF N>M GOTO 700
370 :IF J<E GOTO 700
380 :W1=SGN(X1-U1)
381 :W2=SGN(X2-U2)
385: U1=X1
386:U2=X2
390 :V1=U1-0.1*J*W1
391 :V2=U2-0.1*J*W2
400 :X1=V1+W1*J*RND(1)
401 :X2=V2+W2*J*RND(1)
410 :GOSUB 900
420 :IF J<S GOTO 440
430 :GOTO 400
440 :S=J
450 :N=N+1
460 :GOTO 360
700 :BEEP
710 :PRINT E*(INT(X1/E))
711 :PRINT E*(INT(X2/E))
720 :PRINT N
730 :END
900 :F=A1*X1+A2*X2+A3'SUBROUTINE DELLE EQUAZIONI
910 :G=B1*X1+B2*X2+B3
920 :K=ABS(F)+ABS(G)
930 :J=K*L
940 :RETURN

```

7. - I programmi esposti nei paragrafi precedenti hanno presentato la ricerca della soluzione di un sistema di equazioni lineari sotto l'aspetto della ricerca del valore minimo di una funzione di più variabili.

Queste procedure, ed altre analoghe, possono essere applicate anche a problemi diversi da quelli trattati nei paragrafi ricordati; invero il problema della ricerca di valori minimi di certe funzioni si presenta in molte questioni matematiche, anche in casi che possono essere stimati molto diversi tra loro.

Presentiamo qui un certo numero di questioni, in cui la risoluzione dei problemi corrispondenti viene ricondotta alla ricerca di valori minimi di certe funzioni di più variabili.

Il caso più semplice, ed in certo modo tipico, di problemi di questo tipo si incontra quando si cerchi il valore minimo di una funzione  $K$  di due variabili  $X_1$  ed  $X_2$ , la cui espressione è data dalla somma dei valori assoluti di certi polinomi lineari, in numero non minore di tre: ricordiamo infatti che il caso di due polinomi lineari è già stato considerato, ed è stato illustrato geometricamente con il problema della ricerca dell'intersezione di due rette nel piano, riferito a coordinate cartesiane  $X_1$  ed  $X_2$ .

Nel programma allegato, al quale è stato dato il nome `MINI`, la ricerca di un punto le cui coordinate forniscono dei valori approssimati delle coordinate di quello che dà alla funzione considerata il valore minimo viene fatta con una procedura che è in parte analoga a quella esposta nel paragrafo 4; infatti si parte da un punto iniziale  $U$ , di coordinate  $U_1$  ed  $U_2$ , e si calcola in corrispondenza a questo il valore della funzione considerata, che qui viene chiamata  $JF$ , e calcolata con la subroutine data dalle istruzioni 900...930.

Si costruisce poi un quadrato avente lato di lunghezza  $L$  ed avente il centro in  $U$ , ed in esso si cercano a caso dei punti; in ognuno di essi si calcola il valore della funzione  $JF$ ; quando si incontra un punto  $X$  in cui la funzione ammette un valore minore di quello che ha in  $U$ , si trasporta in esso il centro del quadrato e si ricomincia la ricerca casuale.

La differenza fondamentale di questo caso da quello considerato nel paragrafo 4. sta nel fatto che là si conosce il valore minimo della funzione che si considera: precisamente tale valore minimo è zero, come è stato spiegato a suo tempo; questa circostanza permette di stabilire dei criteri ben determinati per arrestare il procedimento di ricerca del punto, quando la funzione considerata raggiunga dei valori che si stimano sufficientemente piccoli. Diverso è invece il caso presente, perchè ora non si conosce il valore minimo della funzione che si prende in considerazione; pertanto occorre stabilire dei criteri diversi per stimare in modo abbastanza attendibile che si sia raggiunto un punto abbastanza vicino a quello che conferisce alla funzione il suo valore minimo.

E' stato qui adottato il criterio seguente: si stabilisce un determinato intero  $M$ , introdotto nel programma con la istruzione 130; quando si parte da un punto  $U$  e si esplora il quadrato di centro  $U$ , si accetta

che  $U$  sia un punto di minimo della funzione considerata se  $M$  esplorazioni "a caso" nel quadrato di centro  $U$  e lato  $L$  non conducono a valori della funzione minori di quello che essa prende in  $U$ .

Ovviamente il criterio qui esposto conduce ad una conclusione che non è assolutamente certa: il suo grado di attendibilità dipende dal numero  $M$  stabilito (cresce ovviamente con  $M$ ), e cresce con il diminuire del lato  $L$  del quadrato che ha centro in  $U$ : infatti se il lato diminuisce, i punti scelti a caso si fanno più "fitti" intorno ad  $U$  e quindi cresce la attendibilità della conclusione. Tale attendibilità può ovviamente essere migliorata ripetendo il procedimento: per esempio quando si sia raggiunto un punto  $X$ , in corrispondenza a certi valori di  $M$  e di  $L$ , si può ripetere il procedimento, prendendo tale  $X$  come punto di partenza, aumentando il valore di  $M$  e diminuendo quello di  $L$ .

Ovviamente la certezza assoluta non viene mai conseguita; questa circostanza può servire all'insegnante accorto e colto per precisare ancora una volta il significato delle procedure che vengono adottate per la soluzione di un problema matematico. D'altra parte, nei casi concreti che tratteremo in seguito, la incertezza che nasce dalla procedura matematica che si adotta deve essere tenuta in conto, insieme con le incertezze delle misure ed in generale dei dati di partenza, incertezza che è sempre presente nei problemi in cui la Matematica parte da dati sperimentali.

E ribadiamo qui che uno degli scopi della formazione matematica è proprio quello di applicare in modo ragionevolmente alla realtà gli strumenti costruiti da una dottrina astratta, che viene in generale considerata distaccata dalla realtà.

Le istruzioni 180...191 scelgono il punto  $X$  "a caso" nel quadrato di centro  $U$  e lato  $L$ ; la 210 confronta il valore della funzione in  $X$  con quello in  $U$ . Se questo è minore, le istruzioni 240...260 trasportano in quel punto il centro del quadrato e fanno ricominciare la esplorazione; altrimenti si ricomincia la esplorazione stessa nel medesimo quadrato, con le istruzioni 220...230.

Si tiene conto del numero delle esplorazioni inutili con il contatore  $N$  della istruzione 220 e si fa terminare la esplorazione, con la istruzione 185, quando il numero  $N$  delle esplorazioni inutili supera il limite stabilito  $M$ .

La istruzione 290 visualizza, insieme con le coordinate di punto

trovato con la procedura descritta, anche il numero delle volte in cui la procedura di ricerca è stata ripetuta, contando in ogni caso tanto i tentativi risultati "utili" che quelli considerati "inutili".

#### OSSERVAZIONE 1

Nella utilizzazione delle procedure che abbiamo esposto occorre tener presente che si possono presentare dei casi in cui il valore minimo delle funzioni considerate viene assunto dalle funzioni stesse non in un unico punto, ma in tutti i punti di un insieme. La immagine geometrica può aiutare a comprendere questo fatto: si pensi, per esempio, al caso in cui si cerchi il minimo di una funzione data dalla somma dei valori assoluti di tre polinomi lineari. Quando tali polinomi, uguagliati a zero, rappresentano in forma "normale" tre rette che sono lati di un triangolo equilatero, dal significato geometrico delle formule, si ha che ogni punto interno al triangolo dà il valore minimo alla funzione considerata. Tale valore - come è noto - è la somma delle distanze di un punto interno al triangolo dai tre lati del triangolo stesso.

#### OSSERVAZIONE 2

E' del tutto ovvio che le procedure esposte possono essere utilizzate anche per funzioni diverse da quelle trattate nel programma esposto. Sulla base di questi metodi, l'insegnante accorto potrà valersi delle idee e dei metodi della Geometria per costruire altri problemi e quindi altri programmi: per esempio si potrà verificare direttamente la validità del teorema il quale afferma che, dati tre punti non allineati, il punto del loro piano per il quale è minima la somma delle distanze dai tre punti dati vede i lati secondo tre angoli tra loro uguali, che quindi valgono 120 gradi ciascuno.

Ovviamente va sempre ricordato che la verifica numerica, ottenuta attraverso il calcolo, è ben diversa dalla dimostrazione; ancora una volta occorre ribadire che nessun procedimento meccanico può sostituire il ragionamento; e che la formazione a quest'ultimo è lo scopo finale dell'insegnamento della Matematica.

MIN1, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99 :REM.RICERCA DI VALORE MINIMO.
100 :INPUT"A1=";A1'COEFFICIENTI DELLA PRIMA FUNZIONE
101 :INPUT"A2=";A2
102 :INPUT"A3=";A3
110 :INPUT"B1=";B1'COEFFICIENTI DELLA SECONDA FUNZIONE
111 :INPUT"B2=";B2
112 :INPUT"B3=";B3
120 :INPUT"C1=";C1'COEFFICIENTI DELLA TERZA FUNZIONE
121 :INPUT"C2=";C2
122 :INPUT"C3=";C3
125 :INPUT"D1=";D1'COEFFICIENTI DELLA QUARTA FUNZIONE
126 :INPUT"D2=";D2
127 :INPUT"D3=";D3
130 :INPUT"M=";M
135:INPUT"L=";L' LATO DEL QUADRATO
140 :INPUT"U1=";U1'DATI INIZIALI
141 :INPUT"U2=";U2
150 :X1=U1
151 :X2=U2
160 :GOSUB 900
170 :SF=JF
174 :Q=0
175 :N=0
180 :V1=U1-0.5*L
181 :V2=U2-0.5*L
185 :IF N>M GOTO 269
190 :X1=V1+L*RND(1)
191 :X2=V2+L*RND(1)
200 :GOSUB 900
210 :IF JF<SF GOTO 240
220 :N=N+1
221 :Q=Q+1
230 :GOTO 185
240 :SF=JF
250 :U1=X1
251 :U2=X2
255 :Q=Q+1
260 :GOTO 175
269:BEEP
270 :PRINT"X1=";X1
271 : PRINT "X2=";X2
280 :PRINT "JF=";JF
290 :PRINT "Q=";Q
300 :END
900 :FA=A1*X1+A2*X2+A3
910 :FB=B1*X1+B2*X2+B3
920 :FC=C1*X1+C2*X2+C3
921 :FD=D1*X1+D2*X2+D3
930 :JF=ABS(FA)+ABS(FB)+ABS(FC)+ABS(FD)
950 :RETURN
```

8. - Un caso interessante nel quale possono essere applicate le idee esposte poco sopra si incontra in relazione al problema che viene abitualmente indicato come problema di INTERPOLAZIONE LINEARE.

Occorre ricordare che questa espressione viene impiegata in relazione a problemi non sempre omogenei; nel contesto presente il problema può essere preso in considerazione nel modo seguente: è dato un fenomeno fisico o sociale, ed in relazione ad esso si fanno diverse osservazioni di un legame quantitativo tra i valori di due variabili, che verranno qui indicate con Z e W. In particolare si suppone che vi siano delle buone ragioni per poter considerare la Z come "variabile indipendente" e la W come "variabile dipendente".

In queste ipotesi, può essere utile esprimere il legame tra Z e W mediante una formula matematica, la quale permetta di calcolare i valori della variabile W che corrispondono, secondo una attendibile presunzione, ai valori della variabile Z.

Ovviamente la scelta del legame matematico tra Z e W non è imposta dalla osservazione; essa viene fatta in base a criteri dettati da ragioni che si richiamano alla "semplicità" delle formule o dei calcoli, che portano dai valori della Z a quelli della W.

Il primo tipo di legame matematico che si adotta per esprimere la dipendenza della variabile W dalla Z è il legame lineare, cioè una espressione che dà i valori di W mediante un polinomio di primo grado (funzione lineare) della variabile Z, del tipo:

$$(1) \quad W = PZ + R$$

Come è noto, è possibile interpretare Z e W come coordinate cartesiane di punto in un piano; con questa interpretazione la equazione (1) rappresenta una retta nel piano, ed i coefficienti costanti P ed R hanno certi noti significati geometrici, che sono, per P quello di coefficiente angolare della retta, e per R quello di intercetta all'origine.

E' presumibile che le coppie di valori delle variabili che si osservano non appartengano esattamente ad una medesima retta; tuttavia molto spesso si adotta una espressione del tipo della (1) per esprimere il legame tra le due variabili. Sorge così il problema di determinare i valori dei parametri P e R che entrano nella (1), ed in particolare di determinare i criteri per una scelta cosiffatta. Infatti, indicando con:

$$(2) \quad Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

i valori osservati della variabile considerata come indipendente, e indicando con

$$(3) \quad W_1, W_2, \dots, W_n$$

i valori corrispondenti osservati della variabile  $W$ , considerata come dipendente, la formula (1) fa corrispondere ai valori (2) certi valori

$$(4) \quad W_1^0, W_2^0, \dots, W_n^0$$

i quali, in generale, non coincideranno con i valori (3).

I criteri che vengono generalmente adottati per la scelta di  $P$  e di  $R$  si basano sulla ricerca di valori tali da far passare la retta cercata "abbastanza vicino" ad ogni punto le cui coordinate rappresentano coppie di valori corrispondenti osservati. Alla espressione "abbastanza vicino" non è possibile dare a priori un senso preciso; a tal fine si conviene di rendere minima una funzione opportunamente scelta dei valori (3) e (4). Per esempio, un criterio classico conduce a scegliere  $P$  ed  $R$  in modo che sia minima la somma dei quadrati delle differenze tra i valori della successione (3) e quelli di posto corrispondente della successione (4); per tale ragione il criterio ricordato viene chiamato abitualmente METODO DEI MINIMI QUADRATI.

Tuttavia, come abbiamo già detto, la scelta dei criteri non è imposta dalla realtà delle osservazioni sperimentali; pertanto si può pensare che anche la adozione di criteri diversi per la valutazione di  $P$  e di  $R$  possa essere accettabile, in vista dei fini che si vogliono conseguire, fini che si possono presentare come la ricerca di semplicità dei calcoli e delle espressioni matematiche che esprimono il legame tra  $Z$  e  $W$ .

Pertanto si potrebbe anche adottare il criterio di scelta per  $P$  ed  $R$  che porta a dare il valore minimo alla somma dei valori assoluti delle differenze tra i valori della successione (3) e quelli di posto corrispondente della successione (4).

Per questo scopo si può utilizzare la procedura esposta nel paragrafo precedente. Infatti a tale scopo si può scrivere un sistema di

equazioni lineari, nelle quali le incognite sono rappresentate dai due parametri incogniti da determinarsi P ed R.

Pertanto la determinazione dei valori di P e di R che rendono minima la somma delle differenze delle coordinate delle due successioni può essere ricondotta alla soluzione del problema preso in considerazione nel paragrafo precedente. A questo scopo può essere utilizzato il programma ivi illustrato.

Il programma allegato utilizza a questo scopo una parte del programma MINI. Precisamente, a titolo di esempio, viene preso in considerazione il caso in cui siano state fatte 4 osservazioni: si ottengono così 4 funzioni lineari delle due incognite P ed R, ed è possibile utilizzare il programma MINI per la determinazione dei valori di P e di R che rendono minima la somma dei valori assoluti delle funzioni considerate.

Nel programma allegato, al quale è stato dato il nome di INTPI, le istruzioni 150-260 coincidono con quelle del programma MINI, già commentato nel paragrafo precedente. Le istruzioni 10-23 introducono i dati del problema presente, precisamente i valori (2) e (3); la istruzione 40 introduce il lato del quadrato entro il quale viene fatta l'esplorazione, la 30 introduce il valore dell'intero M, con il significato che gli è dato dal programma precedente. Le istruzioni 45, 46 introducono i valori iniziali per l'esplorazione.

Le istruzioni 50-74 traducono i dati del problema attuale nei dati del problema risolto dal programma MINI; analogamente le 270-276 traducono le soluzioni date dal programma MINI nei termini del problema attuale.

Il programma, così come è scritto, è applicabile ad una serie di 4 osservazioni; ma la generalizzazione al caso di un numero qualunque è del tutto ovvia, e può essere oggetto di facili esercizi.

Esempio: siano i dati

$$(5) \quad Z = 1, 2, 3, 4$$

ed i valori corrispondenti della variabile W:

$$(6) \quad W = 1.23, 2.1, 2.6, 2.9$$

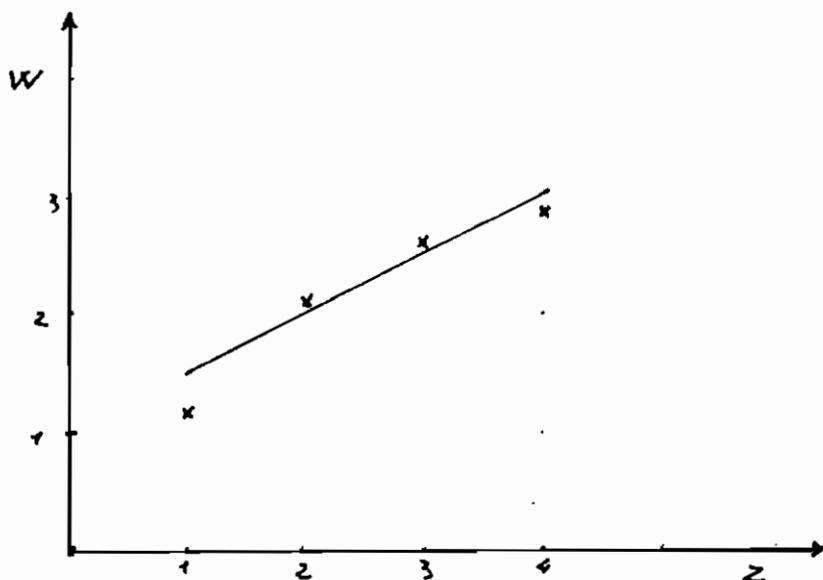
L'applicazione del programma INPTI porta alla legge lineare (1)  
con i seguenti valori per P ed R:

$$(7) \quad P = 0.527$$

$$R = 1.139$$

Sono state qui riportate soltanto le cifre dopo il punto decimale che hanno un significato di informazione significativa, in relazione all'ordine di approssimazione dei dati.

Ovviamente valgono per queste soluzioni tutte le considerazioni che abbiamo già svolte a proposito dei metodi di questo tipo. Pertanto si potrebbero ottenere ulteriori informazioni, quando siano necessarie, partendo dai risultati trovati, aumentando il valore di M e restringendo il valore del lato L.



INTP1, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
9 :REM . INTERP. LINEARE:W=P*Z+R
10 :INPUT "Z1=";Z1
11 :INPUT "Z2=";Z2
12 :INPUT "Z3=";Z3
13 :INPUT "Z4=";Z4
20 :INPUT "W1=";W1
21 :INPUT "W2=";W2
22 :INPUT "W3=";W3
23 :INPUT "W4=";W4
30 :INPUT "M=";M
40 :INPUT "L=";L
45 :INPUT "U1=";U1
46 :INPUT "U2=";U2
50 :A1=Z1
51 :B1=Z2
52 :C1=Z3
53 :D1=Z4
60 :A2=1
61 :B2=1
62 :C2=1
63 :D2=1
70 :A3=-W1
71 :B3=-W2
72 :C3=-W3
74 :D3=-W4
150 :X1=U1
151 :X2=U2
160 :GOSUB 900
170 :SF=JF
174 :Q=0
175 :N=0
180 :V1=U1-0.5*L
181 :V2=U2-0.5*L
185 :IF N>M GOTO 269
190 :X1=V1+L*RND(1)
191 :X2=V2+L*RND(1)
200 :GOSUB 900
210 :IF JF<SF GOTO 240
220 :N=N+1
221 :Q=Q+1
230 :GOTO 185
240 :SF=JF
250 :U1=X1
251 :U2=X2
255 :Q=Q+1
260 :GOTO 175
269 :BEEP
270 :P=X1
271 :PRINT "P=";P
275 :R=X2
276 :PRINT "R=";R
280 :PRINT "JF=";JF
290 :PRINT "Q=";Q
300 :END
900 :FA=A1*X1+A2*X2+A3
910 :FB=B1*X1+B2*X2+B3
920 :FC=C1*X1+C2*X2+C3
921 :FD=D1*X1+D2*X2+D3
930 :JF=ABS(FA)+ABS(FB)+ABS(FC)+ABS(FD)
950 :RETURN
```

9. - Nei paragrafi precedenti abbiamo presentato alcune procedure per risolvere dei problemi matematici con la utilizzazione metodica del calcolatore; i problemi che abbiamo risolto sono abbastanza elementari, e la Matematica possiede in molti casi dei procedimenti classici per risolverli. Un esempio tipico di problema cosiffatto è quello di ricerca del valore minimo di una funzione di una o più variabili, problema che è stato oggetto degli studi dei matematici da molto tempo e che, nei casi più comuni, può essere risolto con regole ormai classiche del calcolo infinitesimale.

Tuttavia noi abbiamo voluto presentare anche delle soluzioni che non fanno appello a nozioni di Matematica superiore, proprio per far vedere praticamente che l'adozione dei nuovi mezzi di calcolo e di elaborazione dell'informazione permette di ampliare la gamma dei problemi che si possono affrontare e risolvere, e per ribadire il concetto, già esposto ripetutamente, che la Matematica non è tanto una scienza che utilizza delle formule quanto una scienza che si cura di inventare delle procedure razionali per ottenere delle informazioni in base ai dati che si posseggono.

Daremo ora qualche cenno di altri problemi che, dal punto di vista concettuale, sono abbastanza semplici, e che ammettono delle illustrazioni geometriche del tutto elementari, ma che in generale non possono essere risolti mediante formule; essi pertanto sono stati trattati e risolti soltanto recentemente, quando i nuovi mezzi di calcolo hanno permesso di escogitare delle procedure efficaci.

I problemi a cui accenniamo vengono genericamente indicati come PROBLEMI DI PROGRAMMAZIONE LINEARE.

Un problema cosiffatto può essere enunciato dicendo che si tratta di ricercare un valore ottimale (massimo oppure minimo, a seconda dei casi) di una funzione di 1° grado (lineare) di più variabili, nel caso in cui queste debbano soddisfare ad un certo numero di restrizioni.

Nella maggior parte dei casi della programmazione lineare classica, tali restrizioni sono espresse mediante delle disequazioni imposte a certe funzioni che sono a loro volta funzioni lineari delle variabili.

Illustreremo qui il caso più elementare di un problema cosiffatto, caso che contempla funzioni di due variabili e restrizioni che pertanto riguardano le due variabili considerate.

Indichiamo le due variabili con  $X_1$  ed  $X_2$ , e le interpretiamo come

coordinate cartesiane di punto in un piano.

Consideriamo poi una funzione lineare  $FF$  delle variabili stesse, espressa da una formula lineare:

$$(1) \quad FF = F1 * X1 + F2 * X2$$

Dalla interpretazione che abbiamo dato segue che, fissati che siano i valori dei coefficienti  $F1$  ed  $F2$ , i luoghi dei punti che soddisfanno alle equazioni:

$$(2) \quad FF = KF \text{ (costante)}$$

sono delle rette, appartenenti ad un fascio di rette tutte parallele tra loro; il valore di  $KF$  determina ovviamente la retta del fascio.

Supponiamo ora che alle variabili  $X1$ ,  $X2$  siano imposti dei vincoli, espressi mediante certe disequazioni lineari.

$$(3) \quad X1 \geq 0, \quad X2 \geq 0.$$

La maggior parte dei problemi di programmazione lineare viene enunciata in modo che i vincoli (3) siano in ogni caso presenti. Siano poi altri vincoli, espressi mediante certe altre disequazioni lineari, che coinvolgono le variabili. Per fissare le idee, e per semplicità nella illustrazione geometrica e nella scrittura del programma, supponiamo che tali disequazioni siano le tre seguenti:

$$(4) \quad \begin{cases} GA = A1 * X1 + A2 * X2 - A3 \leq 0 \\ GB = B1 * X1 + B2 * X2 - B3 \leq 0 \\ GC = C1 * X1 + C2 * X2 - C3 \leq 0 \end{cases}$$

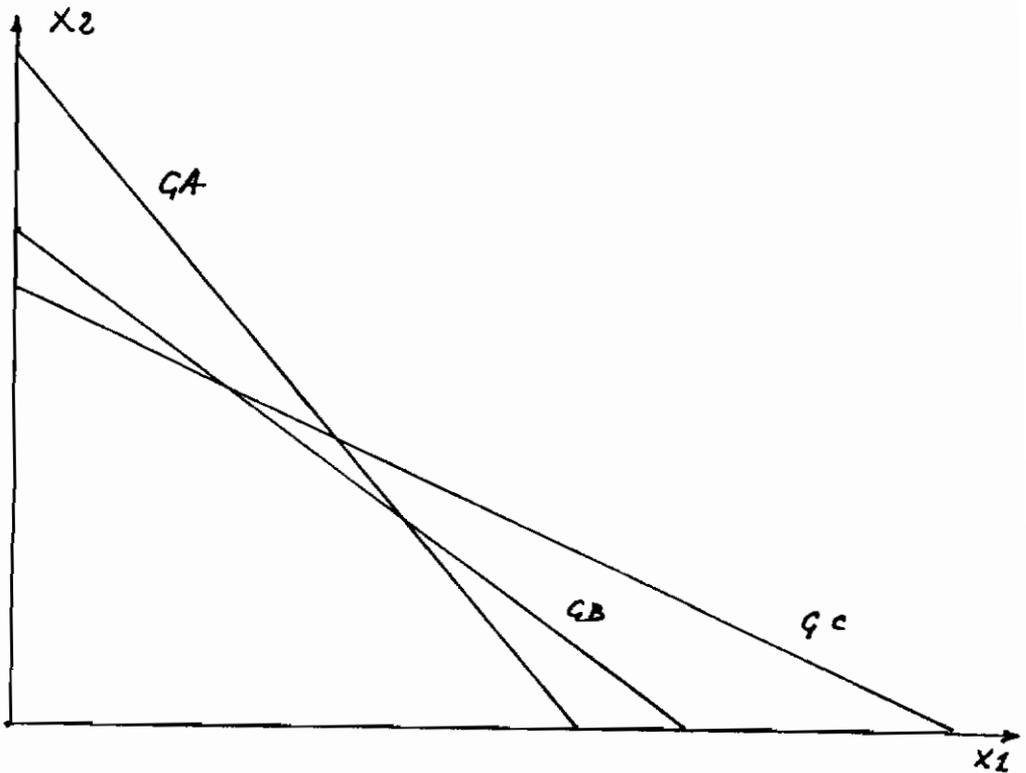
Osserviamo tuttavia che queste restrizioni sul numero delle variabili e dei vincoli non influiscono per nulla sulla natura del problema. Ma d'altra parte, quando i numeri delle variabili e dei vincoli siano grandi, le procedure da adottarsi sono ovviamente meno elementari di quelle che esporremo qui di seguito.

Nel caso che stiamo trattando, supporremo per semplicità che le costanti  $A, B, C$ , che compaiono nelle disequazioni (4), siano tutte positivi-

ve.

In questo caso l'insieme dei punti del piano, le cui coordinate soddisfano a tutte le condizioni (3) e (4) è un poligono PL che è convesso; esso è cioè tale che la retta contenente un lato del poligono lascia tutti i punti del poligono stesso da una medesima parte. In particolare, in questo caso, due lati del poligono PL giacciono sugli assi delle coordinate.

Per semplicità supporremo inoltre che i coefficienti  $F_1$  e  $F_2$  che compaiono nella espressione della funzione  $FF$  siano entrambi positivi.



Queste ipotesi - ripetiamo - non sono per nulla restrittive, per quanto riguarda la natura del problema, ma sono state adottate per rendere più facile la illustrazione geometrica della soluzione del problema.

Tale illustrazione conduce facilmente a constatare che il valore preso dalla funzione  $FF$  in un punto  $X$  del piano è proporzionale alla distanza dall'origine della retta del fascio (1) che passa per  $X$ .

Ne consegue che il punto  $X$  del poligono  $PL$  in cui la funzione  $FF$  assume il suo valore massimo a quel punto di  $PL$  stesso per il quale passa la retta del fascio (1) che è la più distante dall'origine. Ciò avviene in generale in un vertice del poligono  $PL$ ; in particolare tuttavia può avvenire che un lato del poligono  $PL$  sia parallelo a tutte le rette del fascio (1); in questo caso ovviamente il valore massimo nella funzione  $FF$  viene assunto in ogni punto del lato considerato.

Il programma allegato, al quale è stato dato il nome  $PL1$ , adotta, per quanto possibile, le idee direttive del programma  $MIN1$ . In altre parole, si fissa un punto di partenza  $U$ , si sceglie un quadrato avente il suo centro in  $U$ , e si determinano a caso dei punti nell'interno del quadrato: per ognuno di essi si verifica anzitutto che appartenga al poligono  $PL$ , e poi si calcola il valore della funzione  $FF$ . Quando si scopre un punto  $X$  che soddisfi a queste condizioni ed in cui il valore di  $FF$  sia più grande che in  $U$ , si trasporta ivi il centro del quadrato e si riprende la esplorazione.

Questa viene considerata finita e di conseguenza viene considerato raggiunto il valore massimo, se si sono eseguite  $M$  esplorazioni inutili, tali cioè da non fare migliorare il valore di  $FF$ .

Ovviamente si possono ripetere qui le considerazioni già svolte a proposito del programma  $MIN1$ : precisamente le informazioni che si ottengono sulle coordinate del punto  $X$  che dovrebbe far assumere il valore massimo in  $PL$  ad  $FF$  sono da valutarsi con atteggiamento critico; sarebbe comunque consigliabile ripetere la procedura, prendendo come punto di partenza il punto trovato, diminuendo il lato  $L$  del quadrato ed aumentando il numero intero  $M$ .

Queste considerazioni possono offrire all'insegnante colto ed accorto molte occasioni per rimeditare sul significato della Matematica e delle sue procedure.

Il programma allegato, denominato  $PL1$ , traduce le considerazioni

che abbiamo svolto nelle righe precedenti: precisamente le istruzioni 100-122 introducono i valori dei coefficienti delle relazioni di vincolo lineare per le variabili, relazioni che sono in numero di 3 nel caso presente; le 130, 131 introducono i coefficienti della funzione lineare FF della quale si cerca il valore massimo nel poligono determinato dalle condizioni di vincolo e dalle condizioni di non negatività delle variabili  $X_1$  ed  $X_2$ ; le 140, 141 introducono le coordinate del punto di partenza che si sceglie; la 150 introduce il valore dell'intero M, il cui significato è stato spiegato sopra; la 155 introduce il valore del lato del quadrato entro il quale vengono fatte le esplorazioni a caso.

Le istruzioni 180, 190 fanno calcolare il valore della funzione FF nel punto di partenza ed introducono tale valore nella memoria JF. Le 220, 221 fanno scegliere un punto X a caso nel quadrato avente centro in U e lato L; le istruzioni 230, 270 hanno il compito di verificare se il punto X così trovato appartiene al poligono PL, cioè se le sue coordinate soddisfano a tutte le limitazioni che definiscono il poligono stesso. Nel caso in cui anche una sola limitazione non sia soddisfatta si ricerca un altro punto (sempre nel quadrato di centro U) tornando al la istruzione 220.

Quando si è verificato che il punto trovato appartiene al poligono PL, si procede al calcolo del valore preso dalla funzione nel punto stesso con la istruzione 280. Tale valore viene confrontato con quello già posto nella memoria JF e precedentemente calcolato. Se il valore già memorizzato non viene superato, si ripete la ricerca; se viene superato, si trasporta in X il centro del quadrato e si ricomincia (istruzioni 310, 320). Le esplorazioni inutili, cioè quelle che non fanno migliorare il valore della funzione FF, vengono memorizzate (istr. 295), in modo che il procedimento viene arrestato (istr. 210) quando il numero dei tentativi inutili supera quell'intero M che è stato stabilito con la istruzione 150.

PL1, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99: REM. PL1. PROGRAMMAZIONE LINEARE
100: INPUT "A1="; A1 'COEFFICIENTI DEL PRIMO VINCOLO
101: INPUT "A2="; A2
102: INPUT "A3="; A3
110: INPUT "B1="; B1 'COEFFICIENTI DEL SECONDO VINCOLO
111: INPUT "B2="; B2
112: INPUT "B3="; B3
120: INPUT "C1="; C1 'COEFFICIENTI DEL TERZO VINCOLO
121: INPUT "C2="; C2
122: INPUT "C3="; C3
130: INPUT "F1="; F1 'COEFFICIENTI DELLA FUNZIONE FF
131: INPUT "F2="; F2
140: INPUT "U1="; U1 'PUNTO DI PARTENZA
141: INPUT "U2="; U2
150: INPUT "M="; M
155: INPUT "L="; L 'LATO DEL QUADRATO
180: X1=U1
181: X2=U2
185: GOSUBS00
190: JF=FF
200: N=0
210: IF N>M GOTO 330
220: X1=U1-0.5*L+L*RND(1)
221: X2=U2-0.5*L+L*RND(1)
230: IF X1>0 GOTO 240
235: GOTO 220
240: IF X2 >0 GOTO 250
245: GOTO 220
250: IFA1*X1+A2*X2<A3 GOTO 260
255: GOTO 220
260: IFB1*X1+B2*X2<B3 GOTO 270
265: GOTO 220
270: IF C1*X1+C2*X2<C3 GOTO 280
275: GOTO 220
280: GOSUB 500
290: IF FF>JF GOTO310
295: N=N+1
300: GOTO 210
310: JF=FF
315: U1=X1
316: U2=X2
320: GOTO 200
330: BEEP
340: PRINT "X1="; X1
350: PRINT "X2="; X2
360: PRINT "FF="; FF
380: END
500: FF=F1*X1+F2*X2
510: RETURN
```

PARTE IV - Ulteriori spunti didattici

XI - Problemi di logica elementare

.....forse  
tu non pensavi ch'io loico fossi.

(Dante Alighieri - La Divina Commedia - Inf. XXVII, 122)

1. - Dedicheremo i paragrafi che seguono alla trattazione di alcune que  
stioni riguardanti la Logica formale, nella misura in cui questa dottrina  
na ammette alcuni sviluppi che sono collegati più o meno strettamente  
con l'Aritmetica e con l'Algebra.

In questo ordine di idee, ci occuperemo della logica delle proposi  
zioni non analizzate; a tal fine richiamiamo qui alcune nozioni riguardan  
danti questo argomento. Ovviamente ciò che diremo non può essere consider  
ato come una sua trattazione esauritiva (per la quale rimandiamo ai  
trattati specifici), ma vuole avere soltanto il carattere di una breve  
ricapitolazione dei punti che più ci interessano qui.

Nel seguito indicheremo con lettere maiuscole, per esempio A con  
indice numerico:

(1)  $A_1, \dots, A_n, \dots$

delle proposizioni non analizzate. Con questa espressione intendiamo in  
dicare delle proposizioni nelle quali non intendiamo distinguere i termi  
mini costituenti, come soggetto, predicato, copula verbale.

Invece, data una proposizione  $A_i$ , ci interesseremo soltanto se essa  
sia vera oppure falsa; si suole presentare questo fatto dicendo che  
della proposizione ci interessa soltanto il "valore di verità".

Per indicare tale valore di verità vengono utilizzati dagli Autori  
che scrivono di queste cose vari simboli: per esempio i simboli "V" (ve  
ro) e "F" (falso), oppure rispettivamente "T" e "F".

Per i fini che ci interessano, noi converremo qui di indicare con  
la cifra 1 il valore "vero" e con la cifra 0 il valore falso; precisamen  
te, considerata una proposizione  $A_i$ , indicheremo con il simboli  $X_i$   
il suo valore di verità, restando quindi stabilito che i simboli  $X_i$ ,  
quale che sia il valore dell'indice numero  $i$ , indicano soltanto i numer  
ri 0 oppure 1.

Pertanto, data, per esempio, la proposizione A1, scrivendo:

$$(2) \quad x_1 = 1$$

intenderemo indicare che la proposizione suddetta è da noi considerata come vera.

2. - Consideriamo ora certe proposizioni, come quelle simbolizzate nella successione (1); le chiameremo "proposizioni elementari". E' noto che, a partire da queste, è possibile costruire dalle altre proposizioni, che chiameremo "composte", mediante certe operazioni logiche. Le più importanti e le più comunemente usate tra queste operazioni saranno enumerate qui di seguito.

Tali operazioni vengono indicate con opportuni simboli, mediante i quali si costruiscono i simboli delle proposizioni composte a partire da quelli delle proposizioni componenti.

Ricordiamo che sono stati proposti vari sistemi di convenzioni per simbolizzare le proposizioni composte.

Fra i sistemi di convenzioni di uso più comune ricordiamo:

- a) le convenzioni della scuola anglosassone, che traggono la loro origine dalle notazioni proposte dal matematico italiano G. Peano, ed adottate poi da Witthead e Russell;
- b) le convenzioni della scuola polacca, che sono adottate per la scrittura delle formule matematiche da alcune Case costruttrici di macchine calcolatrici;
- c) le convenzioni che hanno la loro origine nei lavori di G. Boole, e che sono adottate da alcuni Autori per indicare le strutture di certi circuiti elettrici, che realizzano le operazioni logiche di cui ci interessiamo.

Noi adotteremo qui le notazioni della scuola tedesca di logica, che ha la sua origine nei lavori del grande matematico D. Hilbert. Osserviamo tuttavia esplicitamente che la scelta di questo simbolismo da parte nostra non è stata imposta da alcuna necessità logica, perché - ripetiamo - le notazioni suddette sono puramente convenzionali; e la scelta di determinate convenzioni piuttosto che certe altre può essere dettata soltanto da ragioni di abitudine, gusto, convenienza o altre.

I simboli di cui ci serviremo per costruire delle proposizioni composte a partire da quelle date verranno anche detti "connettivi".

Il primo connettivo che prenderemo in considerazione rappresenta la operazione logica di "negazione"; essa viene indicata premettendo il segno "-" al simbolo della proposizione che si intende negare. Pertanto, data, per esempio, la proposizione A1, si indicherà con il simbolo:

(3)            - A1

(da leggersi "non A1) la proposizione che si ottiene negando A1: quindi la (3) risulterà falsa se A1 è vera, e vera se A1 è falsa.

Gli altri connettivi che prenderemo in considerazione permettono di costruire una proposizione composta a partire da due proposizioni componenti; la proposizione composta viene simbolizzata scrivendo il simbolo del connettivo tra i simboli delle due proposizioni considerate.

Osserviamo che anche questo modo di scrivere le proposizioni composte è frutto di una convenzione; infatti altre convenzioni di scrittura adottano regole diverse. Tuttavia le convenzioni da noi qui adottate conducono a delle regole di scrittura che sono molto analoghe a quelle delle formule algebriche abituali, e quindi risultano di lettura abbastanza comoda, dopo un esercizio relativamente breve.

I connettivi di cui ci occuperemo nel seguito sono i seguenti:

i) connettivo "et" (detto anche, con espressione inglese, "and"); la proposizione che si ottiene componendo due proposizioni A1 e A2 con questo connettivo viene indicata col simbolo

(4)            A1  $\wedge$  A2

La proposizione composta indicata dalla (4) è considerata vera nel solo caso in cui le A1 ed A2 siano entrambe vere, e falsa in ogni altro caso. Essa viene anche chiamata "congiunzione" o anche "prodotto logico" delle due proposizioni A1 ed A2.

ii) Connettivo "vel" (detto anche, con espressione inglese "or"); la proposizione che si ottiene componendo due proposizioni A1 e A2 con questo connettivo viene indicata con il simbolo:

(5)            A1  $\vee$  A2

Questa proposizione viene considerata falsa nel solo caso in cui A1 e A2 siano false entrambe, e vera in ogni altro caso. Essa viene anche chiamata "alternativa" o anche "somma logica" delle due proposizioni A1 e A2.

ii) Connettivo "freccia"; la proposizione composta da due proposizioni A1 e A2 con questo connettivo viene indicata col simbolo:

$$(6) \quad A1 \rightarrow A2$$

La espressione (6) viene spesso letta con la frase "se A1 allora A2" oppure "A1 implica A2"; per queste ragioni il connettivo freccia viene anche indicato come connettivo di "implicazione materiale"; corrispondentemente la proposizione A1 viene chiamata "antecedente" della implicazione e la A2 viene chiamata "conseguente" della implicazione. La proposizione indicata dal simbolo (6) viene considerata falsa nel solo caso in cui l'antecedente A1 sia vera e la conseguente A2 sia falsa, e vera in tutti gli altri casi.

Si verifica che i valori di verità della proposizione (6), in funzione dei valori di verità delle proposizioni A1 e A2, sono gli stessi della proposizione:

$$(7) \quad \neg A1 \vee A2$$

Di conseguenza alcuni Autori considerano il connettivo "freccia" come un altro modo per esprimere la proposizione composta (7).

iii) Connettivo "doppia freccia"; la proposizione composta da due proposizioni A1 e A2 con questo connettivo viene indicata con il simbolo:

$$(8) \quad A1 \leftrightarrow A2$$

La proposizione (8) viene considerata vera allora ed allora soltanto che le A1 e A2 sono entrambe vere oppure entrambe false; essa viene considerata falsa in ogni altro caso.

Consequentemente il connettivo "doppia freccia" viene anche chiamato connettivo "di equivalenza".

Per la scrittura di proposizioni composte con più di due proposizioni elementari si adottano delle convenzioni molto simili a quelle

adottate nella scrittura delle formule dall'Algebra tradizionale.

Per esprimere queste regole si introduce anzitutto il concetto di "formula ben formata", espressione abbreviata convenzionalmente con il simbolo "fbf".

Per la definizione del concetto di fbf si danno le seguenti regole:

- 1) ogni proposizione singola, del tipo delle (1), è una fbf;
- 2) se  $P$  è una fbf, allora  $\neg P$  è una fbf;
- 3) se  $P$  e  $Q$  sono fbf, allora anche  $P \wedge Q$  e  $P \vee Q$  sono fbf;
- 4) nessuna altra formula è una fbf.

Accanto a queste regole che precisano il concetto di fbf, si accettano anche le regole abitualmente adottate dall'Algebra per l'impiego delle parentesi. Precisamente si conviene che una fbf chiusa tra parentesi debba essere considerata come un tutto unico, il cui valore di verità deve essere calcolato prima del valore di verità della espressione complessa nella quale la parentesi è compresa.

Infine si adottano delle regole che stabiliscono una gerarchia tra connettivi, determinando la portata di questi.

Secondo queste regole, il connettivo di negazione ha la portata minima, e quindi modifica soltanto la proposizione che lo segue immediatamente, a meno che non si diano altre indicazioni mediante parentesi. Così per esempio con il simbolo:

(9)  $\neg A_1 A_2$

si intende indicare la congiunzione della negazione di  $A_1$  con  $A_2$ ; se per esempio si volesse indicare la negazione della congiunzione occorre scrivere:

(10)  $\neg(A_1 A_2)$

I connettivi che hanno portata immediatamente superiore a quella della negazione sono quelli di somma logica e di prodotto logico. Infine i connettivi freccia e doppia freccia hanno portata superiore a quella di tutti gli altri.

Quindi per esempio la scrittura:

(11)  $A_1 A_2 \rightarrow A_3 \vee A_4$

indica l'implicazione materiale che ha come antecedente la congiunzione  $A \wedge A$  e come conseguente l'alternativa  $A \vee A$ .

Con queste convenzioni è possibile scrivere delle formule che contengono un numero qualsivoglia di simboli di proposizioni e di connettivi. Di conseguenza è possibile determinare in ogni caso il valore di verità di una formula ben formata, quando siano dati i valori di verità delle proposizioni che la compongono.

3. - Il calcolo del valore di verità di una proposizione composta può essere eseguito tenendo conto di certe proprietà aritmetiche che conducono a sviluppi interessanti anche dal punto di vista didattico.

Per presentare queste idee ricordiamo che è possibile stabilire un omomorfismo tra l'anello degli interi e quello costituito dai due elementi  $\{0,1\}$ ; tale omomorfismo si può costruire facendo corrispondere ad ogni intero  $N$  il resto della sua divisione per 2.

Nell'insieme di due elementi  $\{0,1\}$  valgono le leggi di calcolo:

$$(1) \quad \begin{cases} 0+0 = 1+1 = 0 ; & 0+1 = 1+0 = 1 \\ 0*0 = 0*1 = 1*0 = 0 ; & 1*1 = 1 \end{cases}$$

Di conseguenza si ha anche, per un qualunque elemento  $X$  dell'insieme, vale la legge:

$$(2) \quad X * X = X$$

Adottando queste leggi, è possibile costruire, nell'insieme di due elementi  $\{0,1\}$ , una Aritmetica, che sarà da noi richiamata come "Aritmetica modulo 2"; infatti le regole di calcolo (1) e (2) possono essere presentate dicendo semplicemente che ad ogni intero si fa corrispondere il resto della sua divisione per 2, e lo stesso si fa per il risultato di ogni operazione tra interi.

Fondandoci su questa osservazione avvertiamo che d'ora innanzi, scrivendo il simbolo di un intero intenderemo di indicare indifferente-

mente un intero qualunque della classe di equivalenza modulo 2 alla quale l'intero appartiene, e di conseguenza il simbolo "=" indicherà d'ora innanzi non l'uguaglianza tra interi, intesa nel senso abituale della Aritmetica elementare, ma la uguaglianza delle classi di equivalenza a cui gli interi appartengono; pertanto scriveremo, per esempio:

$$2 = 10 = 0 ; \quad 7 = 15 = 1$$

Con queste avvertenze possiamo presentare nella Tabella I seguente, in forma molto elementare, le espressioni che permettono i calcoli atti a dare i valori di verità delle proposizioni composte, a partire dai valori delle proposizioni componenti, per i connettivi enumerati.

A tal fine scriveremo a sinistra di ogni riga il simbolo dei connettivi tra proposizioni, e sulla stessa riga la formula aritmetica che permette di calcolarne il valore di verità modulo 2, tenendo presenti le convenzioni stabilite nel paragrafo precedente.

TABELLA I:

1) Negazione:

$$\neg A_1 \quad ; \quad X_1 + 1$$

2) Congiunzione:

$$A_1 \wedge A_2 \quad ; \quad X_1 * X_2$$

3) Alternativa:

$$A_1 \vee A_2 \quad ; \quad X_1 * X_2 + X_1 + X_2$$

4) Freccia:

$$A_1 \rightarrow A_2 \quad ; \quad X_1 * X_2 + X_1 + 1$$

5) Doppia freccia:

$$A_1 \leftrightarrow A_2 \quad ; \quad X_1 + X_2 + 1$$

Ripetiamo che i numeri che stanno a destra di ogni linea sono da intendersi come indicativi di classi di equivalenza modulo 2.

Con queste osservazioni è possibile esprimere i problemi logici sotto la forma di problemi matematici, e quindi adottare per la loro soluzione le procedure che vengono seguite abitualmente per la soluzione dei problemi matematici, espressi e formulati mediante sistemi di equazioni.

Non daremo qui una trattazione generale della teoria, perchè riteniamo più semplice ed efficace la presentazione e la discussione di un esempio che riteniamo abbastanza caratteristico.

Consideriamo un gruppo di tre amici che ne attendono un quarto, di nome Mario, in una località di villeggiatura; e supponiamo che in un determinato giorno questi amici facciano dei progetti per l'indomani, progetti che possono essere formulati nel modo seguente.

Se domani verrà Mario, nel caso in cui ci sia bel tempo, andremo in gita; ma non andremo in gita se farà brutto tempo. Se non andremo in gita giocheremo a ramino o a bridge, ma se andremo in gita non giocheremo nè a ramino nè a bridge. Se Mario non verrà non potremo giocare a bridge; e se giocheremo a bridge non giocheremo a ramino.

Si tratta di valutare le varie ipotesi, prevedendo ciò che avverrà domani, se si vuole tener fede agli enunciati. Una facile analisi conduce a precisare che si possono identificare 5 proposizioni:

- (3) A1 ; Mario verrà domani
- (4) A2 ; domani farà bel tempo
- (5) A3 ; andremo in gita
- (6) A4 ; giocheremo a bridge
- (7) A5 ; giocheremo a ramino.

Se accettiamo che i connettivi presentati rendano in modo sufficiente i rapporti logici definiti dalle proposizioni enunciate con il linguaggio comune, tali proposizioni possono essere formalizzate con le proposizioni del seguente sistema (S), composte mediante i connettivi che abbiamo presentato:

- |     |   |                          |
|-----|---|--------------------------|
| (S) | { | (8)     A1 → (A2 → A3)   |
|     |   | (9)     ¬A2 → ¬A3        |
|     |   | (10)    ¬A3 → (A4 ∨ A5)  |
|     |   | (11)    A3 → (¬A4 ∧ ¬A5) |
|     |   | (12)    A4 → ¬A5         |
|     |   | (13)    ¬A1 → ¬A4        |

In base alle corrispondenze esposte nella Tab. I, potremo far corrispondere ad ognuna di queste relazioni logiche una relazione della

Aritmetica modulo 2 tra i valori di verità delle proposizioni simbolizzate. A tal fine ricordiamo che le proposizioni stesse sono tutte considerate come affermate, e di conseguenza le espressioni aritmetiche che la Tab. I fa corrispondere ad ogni proposizione del sistema (S) debbono essere tutte poste uguali ad 1.

Con questa avvertenza, tenendo presenti le leggi di calcolo che abbiamo esposto sopra, si giunge, con passaggi elementari, al seguente sistema (S'), che traduce le relazioni logiche del sistema (S) in equazioni aritmetiche; ogni equazione del sistema (S') sarà presentata con il numero della relazione del sistema (S) che essa traduce, affetto da un apice.

$$(S') \begin{cases} (8') & E1 = x_1 * x_2 * (x_3 + 1) = 0 \\ (9') & E2 = (x_2 + 1) * x_3 = 0 \\ (10') & E3 = (x_3 + 1) * (x_4 + 1) * (x_5 + 1) = 0 \\ (11') & E4 = x_3 * (x_4 * x_5 + x_4 + x_5) = 0 \\ (12') & E5 = (x_1 + 1) * x_4 = 0 \\ (13') & E6 = x_4 * x_5 = 0. \end{cases}$$

In forza di ciò che è stato detto sopra, la soluzione del sistema (S) può essere ricondotta alla soluzione del sistema (S'), cioè alla ricerca dei valori dei numeri dell'insieme 0,1 che soddisfano alle equazioni del sistema stesso.

La soluzione del sistema (S') non offre alcuna difficoltà concettuale; si può tuttavia osservare che non esistono (almeno nei manuali tradizionali di Matematica) delle formule che diano metodicamente tutte le soluzioni di un sistema di equazioni del tipo di (S').

Pertanto le soluzioni vanno cercate verificando se le equazioni del sistema (S') sono soddisfatte, in tutti i possibili casi che si possono presentare in relazione ai valori ammissibili delle incognite del sistema; poichè tali incognite sono 5 ed ognuna di esse può prendere i valori 0 oppure 1, i casi da prendere in considerazione sono:

$$(14) \quad 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^5 = 32$$

E' questo uno degli esempi in cui l'impiego del calcolatore può rendere facile una impresa che, pur essendo concettualmente banale, ri-

schia di diventare molto difficile, se non impossibile, quando si voglia condurla a termine con metodi manuali.

Il programma allegato, denominato LOG2, realizza la esplorazione metodica di tutti i 32 casi possibili di cui si è detto. A tal fine si utilizza una procedura che abbiamo già sfruttato nel programma LIN2; essa si basa sulla considerazione del fatto che tutte le possibili successioni di 5 cifre 0 oppure 1 danno la rappresentazione in base 2 di ogni intero, da 0 a 31, estremi compresi.

Pertanto tutti i casi possibili per le incognite  $X_1 \dots X_5$  si possono passare in rassegna realizzando le rappresentazione in base 2 di tutti i numeri interi da 0 a 31 ed assegnando in ogni caso ad ogni incognita il valore della cifra che ha il posto corrispondente al suo indice.

Il contatore M1 dà successivamente tutti questi numeri; le istruzioni 170-500 assegnano per ognuno degli interi presi in considerazione i valori alle incognite, passando attraverso la rappresentazione di ogni intero nella base 2. Il che avviene mediante la subroutine 900-950.

Quando ad ogni incognita è assegnato il valore 0 oppure 1, si passa a verificare se le equazioni del sistema (S) sono soddisfatte dai valori considerati. Ciò si fa con le istruzioni 550-745; in particolare si osserva che abitualmente, quando in Matematica si scrive un sistema di equazioni, si intende indicare che ognuna di esse deve essere soddisfatta. Pertanto il programma, dato che sia un insieme di valori per le incognite, passa in rassegna le equazioni del sistema, calcola il valore del primo membro di ogni equazione per i valori considerati delle incognite, e ne calcola il resto modulo 2 con la subroutine 900-950. Se anche una sola delle equazioni non è soddisfatta, cioè se il suo primo membro non dà resto 0 modulo 2, si passa al valore successivo di M1.

La utilizzazione del programma conduce alla seguente tabella di valori possibili per le incognite, cioè di valori di verità per le proposizioni del sistema (S):

X1	X2	X3	X4	X5
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1

Si osserva immediatamente che la procedura seguita per la stesura del programma considerato può essere adottata quando si abbia a che fare con un numero qualsivoglia di equazioni e di incognite.

Ripetiamo che non intendiamo dare qui una trattazione generale dell'argomento: pensiamo che l'esempio ora trattato possa porgere all'insegnante accorto una occasione per ribadire l'idea sulla quale abbiamo tanto insistito nelle pagine precedenti: l'idea cioè che la utilizzazione delle macchine elaboratrici della informazione, quando è fatta in modo intelligente ed attivo, può servire a stimolare la formazione scientifica degli allievi ed a dare una giusta immagine della Matematica.

LOG2. EQUAZIONI DI LOGICA, programma in linguaggio BASIC (Olivetti M10)

```
99 :REM.LOG2.EQUAZIONI DI LOGICA
120 :M1 =0
150 :IF M1 > 31 GOTO 850
155 : P=1
160 :Q1=M1
170 :GOSUB 900
180 :IF P=1 GOTO 300
181 :IF P=2 GOTO 350
182 :IF P=3 GOTO 400
183 :IF P=4 GOTO 450
184 :IF P=5 GOTO 500
300 :X1=Q4
310 :P=P+1
320 :Q1=Q6
330 :GOTO 170
350 :X2=Q4
360 :P=P+1
370 :Q1=Q6
380 :GOTO 170
400 :X3=Q4
410 :P=P+1
420 :Q1=Q6
430 :GOTO 170
450 :X4=Q4
460 :P=P+1
470 :Q1=Q6
480 :GOTO 170
500 :X5=Q4
550 :E1=X1*X2*(X3+1)
555 :Q1=E1
560 :GOSUB 900
565 :IF Q4=0 GOTO 590
570 :M1=M1+1
580 :GOTO 150
590 :E2=(X2+1)*X3
595 :Q1=E2
600 :GOSUB 900
```

```

605 :IF Q4=0 GOTO 630
610 :M1=M1+1
620 :GOTO 150
630 :E3=(X3+1)*(X4+1)*(X5+1)
635 :Q1=E3
640 :GOSUB 900
645 :IF Q4=0 GOTO 660
650 :M1=M1+1
655 :GOTO 150
660 :E4=X3*(X4*X5+X4+X5)
665 :Q1=E4
670 :GOSUB 900
675 :IF Q4=0 GOTO 690
680 :M1=M1+1
685 :GOTO 150
690 :E5=(X1+1)*X4
695 :Q1=E5
700 :GOSUB 900
705 :IF Q4=0 GOTO 720
710 :M1=M1+1
715 :GOTO 150
720 :E6=X4*X5
725 :Q1=E6
730 :GOSUB 900
735 :IF Q4=0 GOTO 800
740 :M1=M1+1
745 :GOTO 150
800 :BEEP
810 :PRINT "X1="; X1
811 :PRINT "X2="; X2
812 :PRINT "X3="; X3
813 :PRINT "X4="; X4
814 :PRINT "X5="; X5
820 :STOP
825 :M1=M1+1
830 :GOTO 150
850 :BEEP
851 :PRINT "END"
860 :END
900 :Q2=Q1/2'SUBROUTINE PER IL RESTO MOD.2
910 :Q3= INT(Q2)
920 :Q4=Q1-2*Q3
930 :Q5=Q1-Q4
940 :Q6=Q5/2
950 :RETURN

```

## COMPUTER ED INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Appunti sulla utilizzazione intelligente delle macchine elettroniche nella didattica della Matematica.

### INDICE

#### PARTE I - La Matematica nella formazione dei giovani

Cap. I - Perché insegnare la Matematica?	pag. 1
Cap. II - L'uomo e la macchina	6
Cap. III - I momenti fondamentali dell'apprendimento	11
Cap. IV - Risolvere un problema	18
Cap. V - Come impiegare il computer in modo intelligente?	24

#### PARTE II - Spunti didattici

Cap. VI - La utilizzazione dei calcolatori nella didattica della Matematica	35
Cap. VII - Calcoli con numeri interi	
1. Ricupero di informazioni	42
2. Funzioni monoargomentali a valori interi	45
2.1. Calcolo del fattoriale di un intero N	45
2.2. Ricerca del minimo divisore di un intero A	46
2.3. Fenomeno aritmetico	48
2.4. Funzione di Eulero-Gauss	49
2.5. Gaussiano di un intero nella base 10	56
3. Funzioni pluriargomentali a valori interi	59
3.1. Massimo comun divisore di due interi naturali	59
3.2. Ancora sulla funzione di Eulero-Gauss	60
3.3. Coefficienti binomiali	62
3.4. Funzione di Legendre	65
3.5. Equazione di analisi indeterminata	67
3.6. Ricerca di terne pitagoriche	69
3.7. Cambiamento di base per la rappresentazione degli interi	72
Cap. VIII - Calcoli con valori approssimati	
1. Calcolo della costante di Archimede	75
1.1. Il problema della determinazione di $\pi$	75
1.2. Metodo degli isoperimetri	78
1.3. Metodo dei perimetri	80
1.4. Quadratura del cerchio	83
2. Procedimenti di iterazione	85
2.1. Generalità sui procedimenti iterativi	85
2.2. Procedimento di Erone per l'approssimazione della radice quadrata di un numero	87
2.3. Altri procedimenti elementari di iterazione	89
2.4. Procedimenti "a ragnatela"	90
2.5. Procedimenti iterativi con frazioni continue	96

## Segue Indice

3. Soluzioni delle equazioni in una incognita	pag. 102
3.1. Approssimazione di una radice con il metodo del dimezzamento degli intervalli	102
3.2. Approssimazione di una radice con il metodo delle corde	106
3.3. Soluzione di una equazione per esplorazione di un intervallo	109
3.4. Procedure particolari per certe equazioni di III grado	113
4. Approssimazioni di aree. Calcolo di integrali de finiti con il metodo dei trapezi	118
 PARTE III - Procedure non usuali	
Cap. IX - Sistemi di equazioni lineari in modo classico	
1. Coefficienti con valori approssimati	122
2. Ricerca del punto comune a due rette	126
Cap. X - Utilizzazione di METODI MONTECARLO	
1. Introduzione	132
2. Calcolo di pigreco con METODI MONTECARLO	133
3. Il problema dell'ago di Buffon	136
4. Il problema dello spezzamento del bastone	140
5. Sistemi di equazioni lineari	143
6. Ancora sui sistemi di equazioni lineari	145
7. Ricerca di valori minimi di certe funzioni	147
8. Problemi di interpolazione lineare	152
9. Problemi di programmazione lineare	157
 PARTE IV - Ulteriori spunti didattici	
Cap. XI - Problemi di logica elementare	
1. Proposizioni elementari	163
2. Proposizioni composte	164
3. Valore di verità di una proposizione composta	168

